幾何学 B 演習問題 No.04 問 31–問 37

対面発表は問 33, 問 34, 問 35, 問 36.

キーワード: ホモトピー類とホモトピー同値, 弧状連結成分によるホモトピー不変量

問 31. X, Y, X', Y' を位相空間とする．また $\psi_{X'} \in C(X', X)$, $\psi_{Y'} \in C(Y', Y)$ をそれぞれホモトピー同値写像とする．このとき, 写像

$$[X, Y] \to [X', Y'],\ [\xi] \mapsto [\phi_Y] \circ [\xi] \circ [\psi_{X'}]$$

は全単射となることを示せ.

問 32. n を自然数とする.

(1) X を位相空間とする．このとき任意の $\phi, \psi \in C(X, \mathbb{R}^n)$ について, $\phi \sim_h \psi$ が成り立つことを示せ.

(2) Y を弧状連結位相空間とする．このとき任意の $\phi, \psi \in C(\mathbb{R}^n, Y)$ について, $\phi \sim_h \psi$ が成り立つことを示せ.

問 33. (重要: 対面発表) X を位相空間とし, $a, b, c \in X$ とする.

(1) $\gamma^a_{\mathrm{id}} : I \to X,\ s \mapsto a$ とおく．γ^a_{id} が $\mathrm{Path}(X, a, a)$ の元を定めることを示せ.

(2) 各 $\gamma \in \mathrm{Path}(X, a, b)$ について,

$$\bar{\gamma} : I \to X,\ s \mapsto \gamma(1 - s)$$

が $\mathrm{Path}(X, b, a)$ の元を定めることを示せ.

(3) $\gamma^{a,b} \in \mathrm{Path}(X, a, b)$, $\gamma^{b,c} \in \mathrm{Path}(X, b, c)$ とする．このとき,

$$\gamma^{b,c} * \gamma^{a,b} : I \to X,\ s \mapsto \begin{cases} \gamma^{a,b}(2s) & (0 \leq s \leq 1/2), \\ \gamma^{b,c}(2s - 1) & (1/2 \leq s \leq 1) \end{cases}$$

が $\mathrm{Path}(X, a, c)$ の元を定めることを示せ.

問 34. (重要: 対面発表) X を位相空間とする．このとき X 上の二項関係 $\sim_{\mathrm{path}}$ が同値関係であることを示せ．ただし, $x \sim_{\mathrm{path}} y$ を “$\mathrm{Path}(X, x, y)$ が空でない” として定める.

以下, $X/\mathrm{path} := X/{\sim_{\mathrm{path}}}$ とおく．また各 $x \in X$ について, その同値類を

$$[x]_{\mathrm{path}} := \{y \in X \mid x \sim_{\mathrm{path}} y\} \subset X$$

とおく.

問 35. (重要: 対面発表) X, Y を位相空間とする．このとき

$$[X, Y] \to \mathrm{Map}(X/\mathrm{path}, Y/\mathrm{path}),\ [\phi] \mapsto \phi_{\mathrm{path}}$$

は写像として well-defined であることを示せ．ただし, 各 $\phi \in C(X, Y)$ について,

$$\phi_{\mathrm{path}} : X/\mathrm{path} \to Y/\mathrm{path},\ [x]_{\mathrm{path}} \mapsto [\phi(x)]_{\mathrm{path}}$$

とおいた.

問 36. (対面発表) $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ とし, $X := S^1 \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^3$ とおく.

(1) X/path を決定せよ (証明は省略してよい).

(2) 連続写像 $\phi, \psi, \xi \in C(X, X)$ をそれぞれ

$$\phi(x, n) := (x, n),\ \psi(x, n) = (x, n + 1),\ \xi(x, n) = ((1, 0), n) \quad ((x, n) \in S^1 \times \mathbb{Z})$$

により定める．このとき $[\phi] \neq [\psi]$ かつ $[\psi] \neq [\xi]$ となることを示せ.

裏へ

問 37. (優先度: 低)

(1) 位相空間が「局所弧状連結」であることの定義を述べよ.

(2) 局所弧状連結位相空間について, 各弧状連結成分は開集合となることを示せ.

(3) 位相多様体の定義を述べよ. また位相多様体が局所弧状連結であることを示せ.

(4) 有理数の集合 $\mathbb{Q}$ は局所弧状連結でないことを示せ.

(5) 有理数の集合 $\mathbb{Q}$ の弧状連結成分をすべて決定し, それらがすべて開集合でないことを示せ.

(6) X を局所弧状連結位相空間とし, Y を位相空間とする. このとき写像

$$[X, Y] \to \mathrm{Map}(X/\mathrm{path}, Y/\mathrm{path}),\ [\phi] \mapsto \phi_{\mathrm{path}}$$

が全射になることを示せ.