

幾何学 B 演習問題 No.05 問 38-問 44

対面発表は問 39, 問 40, 問 41, 問 42, 問 43.

キーワード: 位相空間の三つ組

問 38. X, Y を位相空間とし, $a_1, a_2 \in X, b_1, b_2 \in Y$ とする. また $\phi \in \mathcal{C}((X, a_1, a_2), (Y, b_1, b_2))$ とする. このとき

$$\phi_* : \text{Path}(X, a_1, a_2) \rightarrow \text{Path}(Y, b_1, b_2), \gamma \mapsto \phi \circ \gamma$$

が写像として well-defined であることを示せ.

問 39. (重要: (1), (2) は対面発表, (3) は teams 発表)

- (1) 講義 Theorem 3.2.1 の“境界条件付き”版を定式化せよ. またその命題を証明するにあたり, 確認する必要のある事項をまとめよ.
- (2) 講義 Theorem 3.2.2 の“境界条件付き”版を定式化せよ. またその命題を証明するにあたり, 確認する必要のある事項をまとめよ.
- (3) 上の (1), (2) において定式化された命題をそれぞれ証明せよ.

問 40. (対面発表) $(X, A_1, A_2), (Y, B_1, B_2)$ をそれぞれ位相空間の三つ組とし, $\mathcal{C}((X, A_1, A_2), (Y, B_1, B_2))$ 上の二項関係 $\sim_{h.b.}$ を

$$\phi \sim_{h.b.} \psi \stackrel{\text{def}}{\iff} \phi \text{ から } \psi \text{ への境界条件を満たすホモトピーが存在する}$$

として定める. このとき, “ $\sim_{h.b.}$ ” は $\mathcal{C}((X, A_1, A_2), (Y, B_1, B_2))$ 上の同値関係となることを示せ.

問 41. (対面発表) 「境界条件付きホモトピー類の合成」を定義せよ. またそれが well-defined であることを示せ.

問 42. (対面発表) 「境界条件付きホモトピー類の合成が結合的である」を定式化し, 証明せよ. また「恒等写像の境界条件付きホモトピー類は合成について単位的である」を定式化し, 証明せよ.

問 43. (重要: 対面発表) X, Y, Z を位相空間とし, $a_1, a_2 \in X, b_1, b_2 \in Y, c_1, c_2 \in Z$ とする. また $\alpha \in [(X, a_1, a_2), (Y, b_1, b_2)]_b, \beta \in [(Y, b_1, b_2), (Z, c_1, c_2)]_b$ とする.

(1)

$$\alpha_* : \Pi(X, a_1, a_2) \rightarrow \Pi(Y, a_1, a_2), [\gamma] \mapsto \alpha \circ [\gamma],$$

が写像として well-defined であることを示せ.

(2) $\Pi(X, a_1, a_2)$ から $\Pi(Z, c_1, c_2)$ への写像として

$$(\beta \circ \alpha)_* = \beta_* \circ \alpha_*$$

が成り立つことを示せ.

問 44. (優先度: 低) 二次元球面 $X := S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$ を考える. $a := (1, 0, 0) \in X$ とする.

- (1) 任意の $\gamma_1, \gamma_2 \in \text{Loop}(S^2, a) := \text{Path}(S^2, a, a)$ について, $\gamma_1 \sim_{h.b.} \gamma_2$ が成立することを示せ.
- (2) (考察問題) 設定をとり替えて, $X = S^n$ ($n \geq 3$), $a = (1, 0, \dots, 0)$ としたとき, 上記の命題 (1) は成立するか?
- (3) (考察問題) 設定をとり替えて, $X = S^1, a = (1, 0)$ としたとき, 上記の命題 (1) は成立するか?