幾何学 B 演習問題 No.06 問 45–問 52

対面発表は問 45, 問 47, 問 48.

キーワード: 基本亜群, 基本群

問 45. (重要: 対面発表) X を位相空間とし, $a, b, c \in X$ とする．このとき

$$\Pi(X,b,c) \times \Pi(X,a,b) \to \Pi(X,a,c),\ ([\gamma^{b,c}]_b, [\gamma^{a,b}]_b) \mapsto [\gamma^{b,c}]_b * [\gamma^{a,b}]_b := [\gamma^{b,c} * \gamma^{a,b}]_b$$

が写像として well-defined であることを示せ.

問 46. X を位相空間とする．また $\Pi(X) := \bigsqcup_{a,b\in X} \Pi(X,a,b)$ とおく．$\Pi(X) \times \Pi(X)$ の部分集合 $\Pi(X) \times_{s,t} \Pi(X)$ を

$$\Pi(X) \times_{s,t} \Pi(X) := \bigsqcup_{a,b,c\in X} (\Pi(X,b,c) \times \Pi(X,a,b))$$

と定める．このとき

$$* : \Pi(X) \times_{s,t} \Pi(X) \to \Pi(X),\ ([\gamma]_b, [\gamma']_b) \mapsto [\gamma]_b * [\gamma']_b$$

が写像として well-defined であることを示せ.

問 47. (重要: 対面発表) X を位相空間とする．上の問題で定めた $* : \Pi(X) \times_{s,t} \Pi(X) \to \Pi(X)$ について, 以下をそれぞれ定式化し, 証明せよ.

(1) $*$ は結合的.

(2) 各 $a \in X$ について, $[\gamma^a_{\mathrm{id}}]_b \in \Pi(X)$ は $*$ に関して単位的.

(3) 各 $[\gamma] \in \Pi(X)$ について, $[\overline{\gamma}]$ は $*$ に関する $[\gamma]$ の逆元.

また各 $a \in X$ について, $\pi_1(X,a) := \Pi(X,a,a) := \mathrm{Loop}(X,a)/\sim_{h,b}$ が $*$ について群をなすことを示せ.

問 48. (重要: 対面発表) $a \in \mathbb{R}^n$ とする．基本群 $\pi_1(\mathbb{R}^n, a)$ が自明群であることを示せ.

問 49. X を位相空間とし, $a, b \in X$ とする．また $a \sim_{\mathrm{path}} b$ を仮定する.

(1) 基本群 $\pi_1(X,a)$ と $\pi_1(X,b)$ が群として同型であることを示せ.

(2) 集合 $\pi_1(X,a)$ から集合 $\Pi(X,a,b)$ への全単射写像を構成せよ.

問 50. X を空でない弧状連結位相空間とする．このとき, X についての以下の三条件は同値であることを示せ:

(1) X は単連結.

(2) ある $a_0 \in X$ について, 基本群 $\pi_1(X, a_0)$ が自明群.

(3) 任意の $a, b \in X$ について, $\Pi(X,a,b)$ が一点集合.

問 51. 可縮空間は弧状連結であることを示せ.

問 52. ひとまず次の定理 A を認める (あとで示す)

定理 A: X, Y を位相空間とし, $a \in X$ とする．また $\phi : X \to Y$ をホモトピー同値写像とする．このとき, $\pi_1(X,a)$ と $\pi_1(Y,\phi(a))$ は群として同型.

この定理を認めたうえで, 以下の定理 B を示せ:

定理 B: 可縮空間は単連結.