幾何学 B 演習問題 No.07 問 53–問 56

対面発表は問 53, 問 55.

キーワード: S^1 の基本群

以下, $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とし, $* := 1 \in S^1$ とおく. 各整数 k について, $\gamma_k \in \mathrm{Loop}(S^1, *)$ を

$$\gamma_k : I := [0,1] \to S^1,\ s \mapsto \exp(2\pi iks) = e^{2\pi iks}$$

として定め, 写像 τ を

$$\tau : \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, *),\ k \mapsto [\gamma_k]_b$$

と定義する. また,

$$\pi : \mathbb{R} \to S^1,\ \theta \mapsto \exp(2\pi i\theta) = e^{2\pi i\theta}$$

とおく.

問 53. (対面発表)

(1) $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ が $k_1, k_2 \geq 0$ を満たすとする. このとき $[\gamma_{k_1}]_b * [\gamma_{k_2}]_b = [\gamma_{k_1+k_2}]_b$ となることを示せ.

(2) 各 $k \in \mathbb{Z}$ について, $\overline{\gamma_k} = \gamma_{-k}$ となることを示せ. また $\gamma_0 = \gamma_{\mathrm{id}}^*$ であることを示せ.

(3) 各 $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ について, $[\gamma_{k_1}]_b * [\gamma_{k_2}]_b = [\gamma_{k_1+k_2}]_b$ となることを示せ.

(4) 写像

$$\tau : \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, *),\ k \mapsto [\gamma_k]_b$$

が群準同型であることを示せ.

以下, ひとまず以下の定理 A, 定理 B をそれぞれ認める (後で示す):

定理 A: 各 $\gamma \in \mathrm{Loop}(S^1, *)$ について, $\tilde{\gamma} \in \mathrm{Path}(\mathbb{R}, 0, \mathbb{Z})$ であって, $\pi \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ となるものが一意に存在する. この $\tilde{\gamma}$ を γ の lift とよぶ.

定理 B: $\gamma, \gamma' \in \mathrm{Loop}(S^1, *)$ とする. このとき以下の二条件は同値:

(1) $[\gamma]_b = [\gamma']_b$.

(2) $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma'}(1)$ in $\mathbb{Z}$.

問 54. 各 $k \in \mathbb{Z}$ について, $\gamma_k \in \mathrm{Loop}(S^1, *)$ の lift $\tilde{\gamma_k} \in \mathrm{Path}(\mathbb{R}, 0, \mathbb{Z})$ を考える. このとき

$$\tilde{\gamma_k}(s) = sk \quad (\text{ for any } s \in I)$$

となることを示せ. また $\tilde{\gamma_k}(1) = k$ を確認せよ.

問 55. (対面発表) 写像 $\tau : \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, *)$ が全単射となることを示せ.

問 56. (優先度: 低) 恒等写像 $\mathrm{id}_{S^1} : S^1 \to S^1$ を考える. このとき連続写像 $f : S^1 \to \mathbb{R}$ であって, $\pi \circ f = \mathrm{id}_{S^1}$ となるものは存在するか？