幾何学 B 演習問題 No.08 問 57–問 69

対面発表は問 57.

キーワード: ルベーグ数, 普遍被覆 $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ の path lift, ホモトピー lift

以下, $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とおき,

$$\pi : \mathbb{R} \to S^1,\ \theta \mapsto \exp(2\pi i\theta)$$

とする. また, $V_+ := S^1 \setminus \{-1\}$, $V_- := S^1 \setminus \{1\}$ とおく.

問 57. (対面発表)

(1) 位相空間が点列コンパクトであることの定義を述べよ.

(2) コンパクトな距離空間は点列コンパクトであることを示せ.

(3) 距離空間の開被覆に対するルベーグ数の定義を述べよ.

(4) (Ω, d) をコンパクト距離空間とする. このとき任意の開被覆 $\mathcal{U}$ on Ω について, $\mathcal{U}$ のルベーグ数 $\delta > 0$ が存在することを示せ.

問 58. $I^n := [0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ を考える. $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を I^n の開被覆とする. このとき, 以下の条件を満たす $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在することをしめせ:

条件: 各 $1 \leq k_1, \ldots, k_n \leq N$ について,

$$[(k_1-1)/N, k_1/N] \times [(k_2-1)/N, k_2/N] \times \cdots \times [(k_n-1)/N, k_n/N] \subset U_\lambda$$

となる $\lambda \in \Lambda$ が存在する.

問 59. X を位相空間とし, $\operatorname{diag} X := \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid x_1 = x_2\}$ とおく. X がハウスドルフであることと, $\operatorname{diag} X$ が $X \times X$ における閉集合であることが同値であることを示せ.

問 60. $\mathbb{R} \times_\pi \mathbb{R} := \{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \pi(\theta_1) = \pi(\theta_2)\}$, $\operatorname{diag} \mathbb{R} := \{(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \theta_1 = \theta_2\}$ とおく. このとき $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ の開集合 U であって, $U \cap (\mathbb{R} \times_\pi \mathbb{R}) = \operatorname{diag} \mathbb{R}$ となるものが存在することを示せ.

問 61. X を連結な位相空間とし, $a \in X$ を固定する. また $b \in \mathbb{R}$ も固定し, $c := \pi(b) \in S^1$ とおく. このとき,

$$\mathcal{C}((X, a), (\mathbb{R}, b)) \to \mathcal{C}((X, a), (S^1, c)),\ \ell \mapsto \ell_\pi := \pi \circ \ell$$

は単射であることを示せ.

問 62. このとき, 各 $\varepsilon \in \{+, -\}$ について, $\pi^{-1}(V_\varepsilon) \subset \mathbb{R}$ を求めよ. また, 同相写像

$$\xi_\varepsilon : \pi^{-1}(V_\varepsilon) \to V_\varepsilon \times \mathbb{Z}$$

であって,

$$\pi|_{\pi^{-1}(V_\varepsilon)} = p_{V_\varepsilon} \circ \xi_\varepsilon$$

となるものを構成せよ. ただし, p_{V_ε} は $V_\varepsilon \times \mathbb{Z}$ から V_ε への射影とする.

問 63. X を位相空間とし, A を X の連結な部分集合とする. また $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$, $F \in \mathcal{C}(X, S^1)$ とする. ここで, ある $\varepsilon \in \{+, -\}$ について, $F(X) \subset V_\varepsilon$ であることを仮定する. このとき, $\tilde{F} \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ であって, $\pi \circ \tilde{F} = F$ かつ $f = \tilde{F}|_A$ となるものが存在することを示せ.

裏へ

問 64. A を空でない連結位相空間とする.

$$\iota : A \to I \times A,\ a \mapsto (0, a)$$

とおく. $f \in \mathcal{C}(I \times A, S^1)$, $F \in \mathcal{C}(I \times A, S^1)$ を $F \circ \iota = \pi \circ f$ を満たすものとする. また, 以下を仮定する:

仮定　狭義単調増加数列 $(s_0, \ldots, s_N)$ with $s_0 = 0$, $s_N = 1$, および記号列 $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$ with $\varepsilon_k \in \{+, -\}$ $(k = 1, \ldots, N)$ であって, $F([s_{k-1}, s_k] \times A) \subset V_{\varepsilon_k}$ が任意の $k = 1, \ldots, N$ で成立するというものが存在する.

このとき, $\tilde{F} \in \mathcal{C}(I \times A, \mathbb{R})$ であって, $\pi \circ \tilde{F} = F$ かつ $f = \tilde{F} \circ \iota$ となるものが一意に存在することを示せ.

問 65. 演習問題 No.07 において紹介されている定理 A を示せ.

問 66. 整数 $n \geq 0$ を固定する.

$$\iota : I^n \to I^{n+1},\ t \mapsto (0, t)$$

とおく. また $f \in \mathcal{C}(I^n, \mathbb{R})$, $H \in \mathcal{C}(I^{n+1}, S^1)$ with $\pi \circ f = H \circ \iota$ を固定する. このとき, $\tilde{H} \in \mathcal{C}(I^{n+1}, \mathbb{R})$ であって, $\pi \circ \tilde{H} = H$ かつ $\tilde{H} \circ \iota = f$ となるようなものが一意に存在することを示せ.

問 67. X を連結位相空間とし, Y を離散空間とする. このとき X から Y への連続写像は定値写像に限ることを示せ.

問 68. 演習問題 No.07 において紹介されている定理 B を示せ.

問 69. (難: 優先度低) X を任意の位相空間とし,

$$\iota : X \to I \times X,\ x \mapsto (0, x)$$

とおく. また $f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, $H \in \mathcal{C}(I \times X, S^1)$ with $\pi \circ f = H \circ \iota$ を固定する. このとき, $\tilde{H} \in C(I \times X, \mathbb{R})$ であって, $\pi \circ \tilde{H} = H$ かつ $\tilde{H} \circ \iota = f$ となるようなものが一意に存在することを示せ.