幾何学 B 演習問題 No.09 問 70–問 81

対面発表は問 70, 問 73, 問 75, 問 77.

キーワード: 基本群とホモトピー, 直積空間と基本群

問 70. (対面発表) X, Y を位相空間とする.

(1) $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}(I, X)$, $\phi \in \mathcal{C}(X, Y)$ について,

$$\phi \circ (\gamma_1 * \gamma_2) = (\phi \circ \gamma_1) * (\phi \circ \gamma_2) \quad \text{as in } \mathcal{C}(I, Y)$$

となることを示せ.

(2) 各 $\phi \in \mathcal{C}(x, Y)$ について,

$$\phi_* : \Pi(X) \to \Pi(Y),\ [\gamma]_b \mapsto [\phi \circ \gamma]_b$$

と定める. このとき, "ϕ_* は積と単位元を保つ" ということを定式化し, 証明せよ.

問 71. X, Y, Z を位相空間とする. $\phi_1 \in \mathcal{C}(X, Y)$, $\phi_2 \in \mathcal{C}(Y, Z)$ について,

$$(\phi_2)_* \circ (\phi_1)_* = (\phi_2 \circ \phi_1)_* \text{ as } \Pi(X) \to \Pi(Z)$$

となることを示せ.

問 72. (X, a), (Y, b) を基点付き空間 (位相空間とその点の組) とする. 各 $\alpha \in [(X, a), (Y, b)]_b$ について,

$$\alpha_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(Y, b),\ [\gamma]_b \mapsto \alpha \circ [\gamma]_b$$

とおく. $\phi \in \alpha$ を固定するとき, このとき任意の $[\gamma]_b \in \pi_1(X, a)$ について, $\phi_*([\gamma]_b) = \alpha_*([\gamma]_b)$ となることを示せ (ϕ_* は問 70 の意味で定義されているものとする). また α_* が群準同型であることを示せ.

問 73. (対面発表) X, Y を位相空間とし, $\phi, \psi \in \mathcal{C}(X, Y)$ および, ϕ から ψ へのホモトピー H を固定する. また各 $a \in X$ について, $\ell_a^H \in \mathrm{Path}(Y, \phi(a), \psi(a))$ を

$$\ell_a^H(t) := H(a, t) \quad (t \in I)$$

により定め, また, $\theta_a^H := [\ell_a^H]_b \in \Pi(Y, \phi(a), \psi(a))$ とおく.

(1) 各 $a, b \in X$ について,

$$\Theta_{a,b}^H : \Pi(Y, \phi(a), \psi(a)) \to \Pi(Y, \phi(b), \psi(b)),\ \alpha \mapsto \theta_a^H * \alpha * \overline{\theta_b^H}$$

とおく. ただし, $\overline{\theta_b^H}$ は θ_b^H の "逆元" とする. このとき, $\Theta_{a,b}^H$ が全単射であることを示せ.

(2) $a, b \in X$ とする. このとき任意の $\alpha \in \Pi(X, a, b)$ に対し,

$$\theta_a^H * (\phi_*(\alpha)) = (\psi_*(\alpha)) * \theta_b^H$$

が成り立つことを示せ. また,

$$\Theta_{a,b}^H \circ \phi_* = \psi_* \quad (\text{ as } \Pi(X, a, b) \to \Pi(Y, \psi(a), \psi(b)))$$

となることを示せ.

問 74. X, Y を位相空間とし, $\phi : X \to Y$ をホモトピー同値写像とする. このとき, 各 $a \in X$ について,

$$\phi_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(Y, \phi(a)),\ [\gamma]_b \mapsto [\phi \circ \gamma]_b$$

は群準同型であることを示せ.

裏へ

問 75. (対面発表) $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $* := 1 \in S^1$ とする. $\phi, \psi \in \mathcal{C}(S^1, \mathbb{C} \setminus \{0\})$ を,

$$\phi(z) := iz,\ \psi(z) := 1 \quad (z \in S^1)$$

として定める. このとき $[\phi] \neq [\psi]$ となることを示せ.

問 76. $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $* := 1 \in S^1$ とする. また各 $n \in \mathbb{Z}$ について, $\phi_n \in \mathcal{C}(S^1, \mathbb{C} \setminus \{0\})$ を

$$\phi_n : S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\},\ z \mapsto z^n,$$

により定める. このとき, $n, m \in \mathbb{Z}$ について以下の二条件が同値であることを示せ:

(1) $[\phi_n] = [\phi_m]$.

(2) $n = m$.

問 77. ((1) は対面発表, (2) は teams 発表)

(1)「直積空間の基本群は基本群の直積である」を定式化せよ.

(2) 上で定式化した命題を示せ.

問 78. $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $* := 1 \in S^1$ とし, $T^2 := S^1 \times S^1$, $* := (1,1) \in T^2$ とおく. また, $\gamma_k, \ell_k \in \mathrm{Loop}(T^2, *)$ を

$$\gamma_k(s) = (\exp(2\pi iks), 1),\ \ell_k(s) := (1, \exp(2\pi iks)),\ (s \in I)$$

として定める. このとき,

$$\Xi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \pi_1(T^2, *),\ (k_1, k_2) \mapsto [\gamma_{k_1}]_b * [\ell_{k_2}]_b$$

は群同型であることを示せ.

問 79. 各 $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ について, $\phi_{n_1,n_2} \in \mathcal{C}(T^2, T^2)$ を

$$\phi_{n_1,n_2} : T^2 \to T^2,\ (z_1, z_2) \mapsto (z_1^{n_1}, z_2^{n_2})$$

として定める. このとき, $(n_1, n_2), (m_1, m_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ について, 以下の二条件が同値であることを示せ:

(1) $[\phi_{(n_1,n_2)}] = [\phi_{(m_1,m_2)}]$.

(2) $(n_1, n_2) = (m_1, m_2)$.

問 80. (救済レポート) S^1 と $T^2 := S^1 \times S^1$ がホモトピー同値でないことを示せ.

問 81. (救済レポート) 以下, $D^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ とする. また S^1 から D^2 への包含写像を ι とする.

(1) $F \in \mathcal{C}(D^2, S^1)$ であって, $F \circ \iota = \mathrm{id}_{S^1}$ を満たすもの (レトラクション) は存在しないことを示せ.

(2) $g \in \mathcal{C}(D^2, D^2)$ について,

$$D_g^2 := \{z \in D^2 \mid g(z) \neq z\}$$

とおく. また, 各 $z \in D_g^2$ について, 開半直線 $L_{g(z),z}$ を

$$L_{g(z),z} := \{(1-t)g(z) + tz \mid t > 0\} \subset \mathbb{C}$$

として定める ($g(z)$ を始点とし z を通る半直線から始点 $g(z)$ だけ抜いたもの). このとき S^1 と $L_{g(z),z}$ の交点 $F(z)$ を求めよ. また,

$$F : D_g^2 \to S^1,\ z \mapsto F(z)$$

が連続であることを示せ. また各 $z \in S^1 \cap D_g^2$ について, $F(z) = z$ となることを確認せよ.

(3) (D^2 上の不動点定理) 任意の $g \in \mathcal{C}(D^2, D^2)$ について, $g(z) = z$ となる $z \in D^2$ が存在することを示せ.