

問 1. X を位相空間とし, $a, b \in X$ とする.

(1) $\gamma, \gamma' \in \text{Path}(X, a, b)$ とする. γ から γ' へのホモトピー $H \in C(I \times I, X)$ が “境界条件を満たす” ことの定義を述べよ.

(2) $\text{Path}(X, a, b)$ 上の同値関係 “ $\sim_{h.b.}$ ” の定義を述べよ.

(3) 集合 $\Pi(X, a, b)$ の定義を述べよ.

(4) 群 $(\pi_1(X, a), *)$ の定義を述べよ (集合 $\pi_1(X, a)$ を定義したうえで, 積 “*” の定義についても説明すること).

(5) $\gamma \in \text{Path}(X, a, b)$ とする. このとき, 群準同型

$$\Theta : \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(X, b), \alpha \mapsto [\gamma]_b * \alpha * [\bar{\gamma}]_b$$

が全単射であることを示せ.