

$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とし, $*$:= $1 \in S^1$ とおく. 各整数 k について, $\gamma_k \in \text{Loop}(S^1, *)$ を

$$\gamma_k : I := [0, 1] \rightarrow S^1, s \mapsto \exp(2\pi i k s) = e^{2\pi i k s}$$

として定める. また,

$$\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1, \theta \mapsto \exp(2\pi i \theta) = e^{2\pi i \theta}$$

とおく.

問 1. $(k_1, k_2) = (1, 2)$ とする. このとき

$$[\gamma_{k_1} * \gamma_{k_2}]_b = [\gamma_{k_1+k_2}]_b$$

を示せ.

問 2. $(k_1, k_2) = (-1, 2)$ とする. このとき

$$[\gamma_{k_1} * \gamma_{k_2}]_b = [\gamma_{k_1+k_2}]_b$$

を示せ.

問 3. k を整数とする. $\tilde{\gamma}_k \in \text{Path}(\mathbb{R}, 0, \mathbb{Z})$ を

$$\tilde{\gamma}_k : I := [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto ks$$

として定める. このとき $\pi \circ \tilde{\gamma}_k = \gamma_k$ となることを示せ.