

$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とし, $*$:= $1 \in S^1$ とおく. また各 $k \in \mathbb{Z}$ について, $\gamma_k \in \text{Loop}(S^1, *)$ を

$$\gamma_k : I \rightarrow S^1, s \mapsto \exp(2\pi iks)$$

と定める.

問 1.

$$\psi : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z^2$$

とおく. このとき, 各 $k \in \mathbb{Z}$ について, $\psi \circ \gamma_k = \gamma_{2k}$ となることを示せ.

問 2.

$$\phi : S^1 \rightarrow S^1, z \mapsto z$$

とおく. このとき, $[\phi] \neq [\psi]$ となることを示せ.

問 3. $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ とし, $*$:= $(1, 1, 1) \in T^3$ とおく. このとき基本群 $\pi_1(T^3, *)$ は可換群 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ と同型であることを示せ.