5　ドップラートモグラフィーへの応用

ドップラートモグラフィーとは質量降着がおきている近接連星系でよく使われる解析手法です。連星系の回転を利用して様々な方向から輝線形状を観測することで、速度空間での輝度分布を再構成します。これまでと同様、ドップラートモグラフィーも観測データ数よりも再構成したい画像の情報量の方が多くなることがあります。従来は最大エントロピー法や高周波数成分を除去して問題を解きますが、ここでは画像の微分空間でスパースにする Total Variation Minimization (TVM) を使います。前章までで扱ったようなフーリエ変換とは異なる、また対象そのものをスパースにするモデルとも異なる例として紹介します。

降着円盤からの放射が強い天体のスペクトルをとると、図 1 のようなダブルピークの輝線形状が観測されます。図 2 は降着円盤内でガスがケプラー回転している時、紙面に向かって見て視線速度が等しい領域が異なる色で描かれています。光学的に薄いと仮定すると、観測される輝線形状は領域ごとの足し合わせであり、領域の面積が最も大きい視線速度で輝線フラックスは極大になります。青側（観測者に対して近づく側）と赤側（観測者から遠ざかる側）でそれぞれピークが存在し、視線速度 0 の付近は面積が小さいため、結果としてダブルピークの形状になります。さらに図 1 からわかるように、輝線の形状は時間と共に変化することがあります。これは例えば図 3 のように円盤中の一部に明るい領域が存在する場合、連星系の回転によって円盤を見る方向が変わることで、この明るい領域の視線速度が変化するために観測される現象です。逆に言えば、輝線の形状変化は降着円盤の輝度分布の情報を含んだものであり、観測から輝度分布を再構成できます。これがドップラートモグラフィーです。この手法は「速度空間上の」輝度分布を再構成します。実空間上での輝度分布を知るには、実空間上の速度場の情報が必要です。速度場モデルとしてケプラー回転や制限 3 体問題の周期解を仮定することは可能ですが、その仮定が正しいかは自明ではないため、ドップラートモグラフィーを扱う研究では通常実空間への変換はせず、速度空間での輝度分布（＝ドップラーマップ）だけで議論されます。

ドップラートモグラフィーのモデルを簡単に紹介します。速度空間上のある点 (v_x, v_y) を軌道位相 ϕ で観測した時の視線速度は

$$v_{\mathrm{R}} = -v_x \cos\phi + v_y \sin\phi \tag{1}$$

と表されます。視線速度は遠ざかる向きを正の方向に定義しています。観測データはスペクトルですが、これはある軌道位相、ある視線速度で観測された輝線フラックスの集合とみなすことができます。ドップラーマップ $\boldsymbol{s}$ と観測データ $\boldsymbol{d}$ の間には線形の関係 $\boldsymbol{d} = A\boldsymbol{s}$ があり、行列 A の要素 a_{ij} は例えば

$$a_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(v_{\mathrm{R,obs},i} - v_{\mathrm{R},ij})^2}{2\sigma^2}\right\}, \tag{2}$$

と書くことができます。ここで $v_{\mathrm{R,obs},i}$ は i 番目の観測データの視線速度、$v_{\mathrm{R},ij}$ は対応する軌道位相における $\boldsymbol{s}$ の j 番目の要素の視線速度で、式 (1) から計算されます。正規分布の形をしているのは装置のレスポンスに対応します。つまり、ある視線速度の光が入ってきたとき、分散 σ^2 で広がって検出されるモデルです。$\boldsymbol{d}$ の次元 M が $\boldsymbol{s}$ の次元 N より小さいときは正則化項が必要で、推定したい解は一般的に以下のように書けます。

$$\hat{\boldsymbol{s}} = \arg\min_{\boldsymbol{s}} \left\{ \|\boldsymbol{d} - A\boldsymbol{s}\|_2^2 + \lambda\Phi \right\}. \tag{3}$$

$\lambda\Phi$ が正則化項です。前章までの例では推定したい量の 1 次ノルムでした（$\Phi = \sum |s|$）。しかし今回の場合、ドップラーマップが速度空間上でスパースとは限りません。実際に降着円盤な

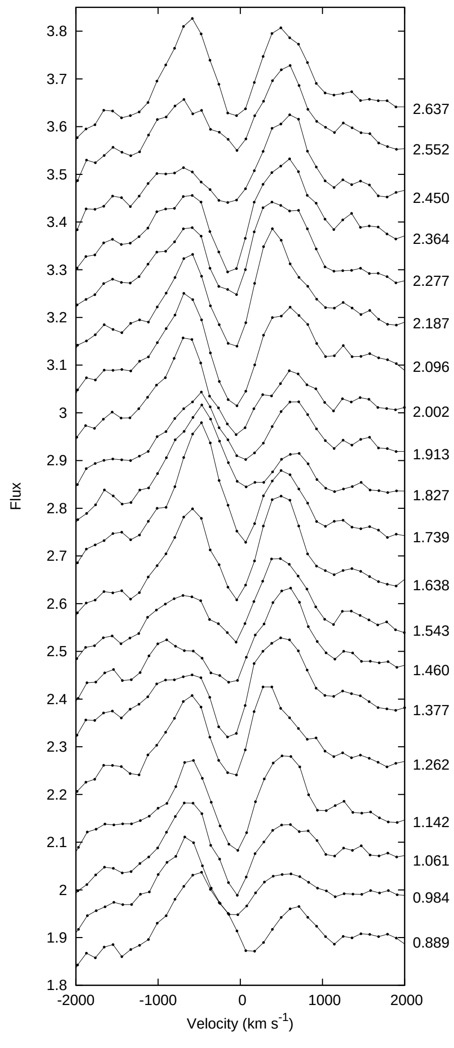

図 1: 降着円盤からの輝線とその時間変動の例。データは文献 [2]

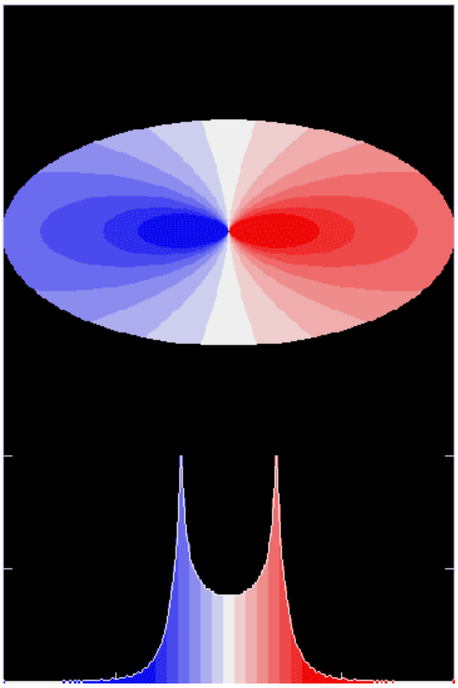

図 2: 降着円盤がケプラー回転している時の等視線速度マップと対応する輝線形状。赤色が遠ざかる側、青色が近づく側を表している。（大阪教育大学　福江研究室 HP より）

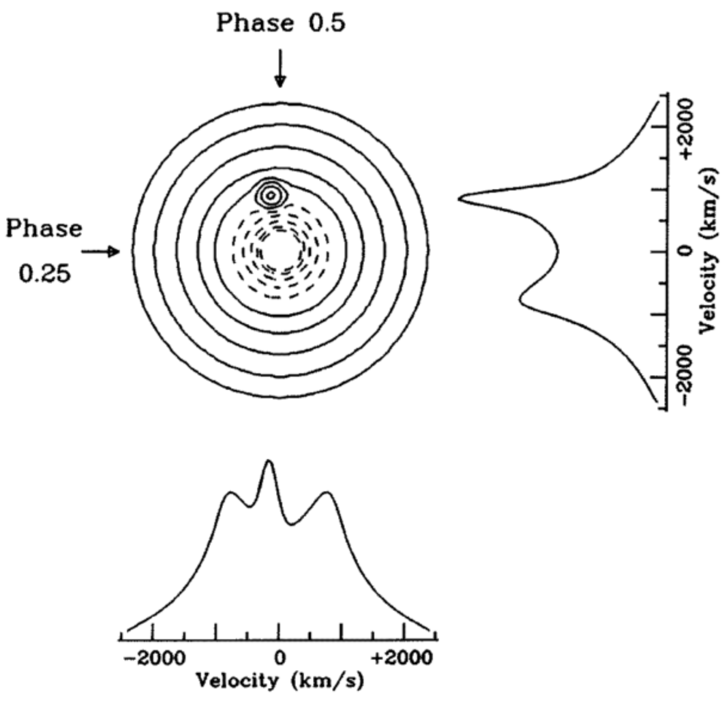

図 3: 速度空間上の輝度分布と観測される輝線形状の関係。[1]

どの広がった構造が観測されます。これまでドップラートモグラフィーでは最大エントロピー法（Maximum Entropy Method; MEM）が使われてきました。MEM の正則化項は以下のように書けます。

$$\Phi_{\mathrm{MEM}}(\boldsymbol{s}) = -\sum_{i,j}\left(s_{i,j}\ln\frac{s_{i,j}}{\chi_{i,j}} + \chi_{i,j}\right) \tag{4}$$

ここで $\chi_{i,j}$ はデフォルトマップと呼ばれるもので、このマップの時に情報エントロピーは最大になります。デフォルトマップは観測対象によって適切なものを選ぶ必要があります。MEM によるドップラートモグラフィーはこれまでに円盤上のスパイラル構造や伴星からの輝線を検出するなど多くの成果を挙げてきました。一方で、MEM は局在化した構造や鋭いピークや境界をもつような構造を鈍らせてしまうことも知られています。降着円盤の場合、衝撃波による輝線放射領域の構造にも興味があるため、この MEM の性質とは相性がよくありません。

Total Variation Minimization (TVM) は係数ベクトル $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ の差分空間 $\{x_2 - x_1, x_3 - x_2, \cdots, x_N - x_{N-1}\}$ の 1 次ノルムを最小化することで、差分空間でスパースな解を選択します。2 次元画像の場合、TVM は

$$\Phi_{\mathrm{TVM,iso}}(\boldsymbol{s}) = \sum_{i,j}\sqrt{(s_{i+1,j} - s_{i,j})^2 + (s_{i,j+1} - s_{i,j})^2}. \tag{5}$$

もしくは

$$\Phi_{\mathrm{TVM,aniso}}(\boldsymbol{s}) = \sum_{i,j}|s_{i+1,j} - s_{i,j}| + |s_{i,j+1} - s_{i,j}|. \tag{6}$$

のように定義されます。前者は isotropic TV, 後者は anisotropic TV と呼ばれます。ここでは前者をドップラートモグラフィーに使って解析した例を紹介します。[3] 図 4 は WZ Sge という矮新星のデータを使って TVM で得られた結果です。上段がドップラーマップ、下段はモデルスペクトルと観測との残差です。スペクトルは図 1 のようなデータをグレースケールで表示しています。黒い部分がフラックスの高い領域です。図では λ の値を変えて、3 種類の結果を示しています。ドップラーマップの中央にある楕円状のドーナツ構造は降着円盤の存在を意味します。円盤内は一様な輝度分布ではなく、非軸対象な構造をもっていることがわかります。一方で、図 5 は同じデータを MEM で解析した結果です。ドップラーマップは TVM のものとかなり異なります。円盤はほぼ完全な円形で、比較的滑らかな 2 本の腕構造が見られます。注目すべきはスペクトルデータとモデルの残差です。TVM では目立った残差がありませんが、MEM では連星周期で回転している残差構造が見られます。これは局所的に集中した明るい領域が存在することを示唆します。MEM では滑らかな構造が選択されたため、そのような局所的な構造は再現されなかったが、TVM では再現された、と解釈できます。

この比較は正則化項が異なるモデルですから、結果が異なるのは当然です。今回の場合は TVM も MEM も物理の第一原理から期待される正則化項ではないので「どちらが真のマップか」という問いは難しい問題です。しかし上の例のように、MEM では明らかに再構成すべき成分が残ってしまうような場合では、TVM に軍配が上がるでしょう。実際、矮新星の降着円盤では衝撃波など局所的に明るい構造が期待されますから、そのような構造を再構成するのは重要です。TVM は差分空間で解をスパースにするスパースモデリングの一種です。式 (5)(6) を見ると s の次元が 2 次ではなく 1 次になっていることがわかります。1 次ノルムによる正則化が従来手法と比べても良好な結果をもたらしてくれる好例といえます。

前章の最後でも紹介しましたが、画像再構成に様々な基底での 1 次ノルム最小化を利用する研究は他分野で盛んに行われています。医療用 MRI では例えば、実空間でのスパース性、

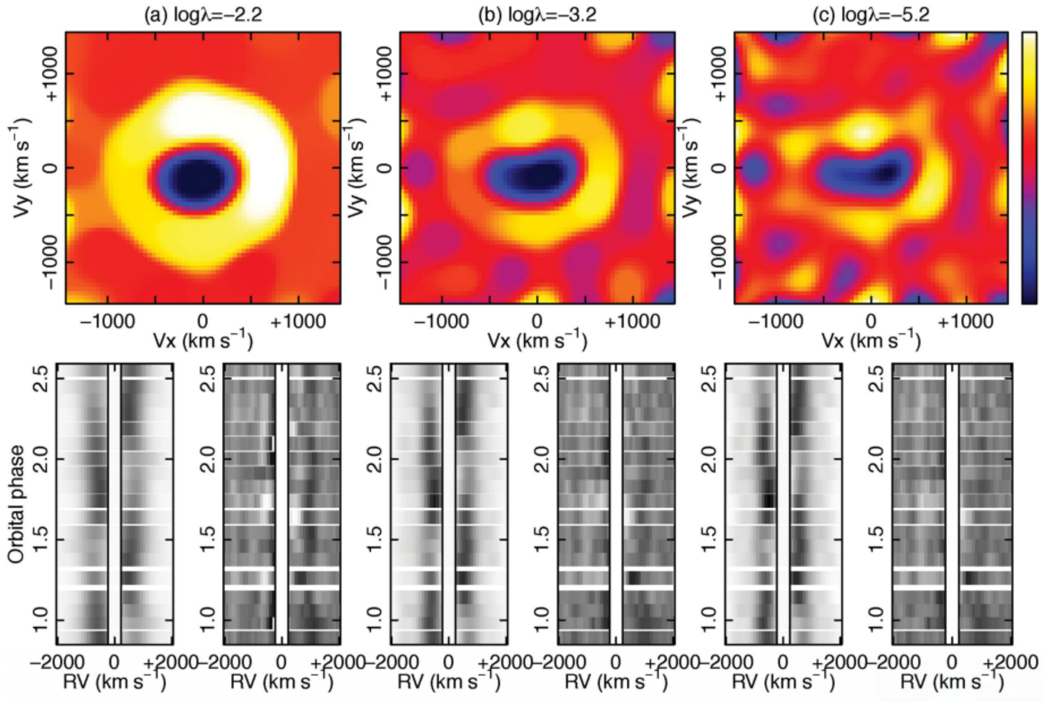

図 4: 矮新星 WZ Sge のデータを使って TVM によって得られたドップラーマップ（上段）とモデルスペクトル・観測との残差（下段）。3 組の結果は異なるパラメータ λ を用いて計算されたもの。[3]

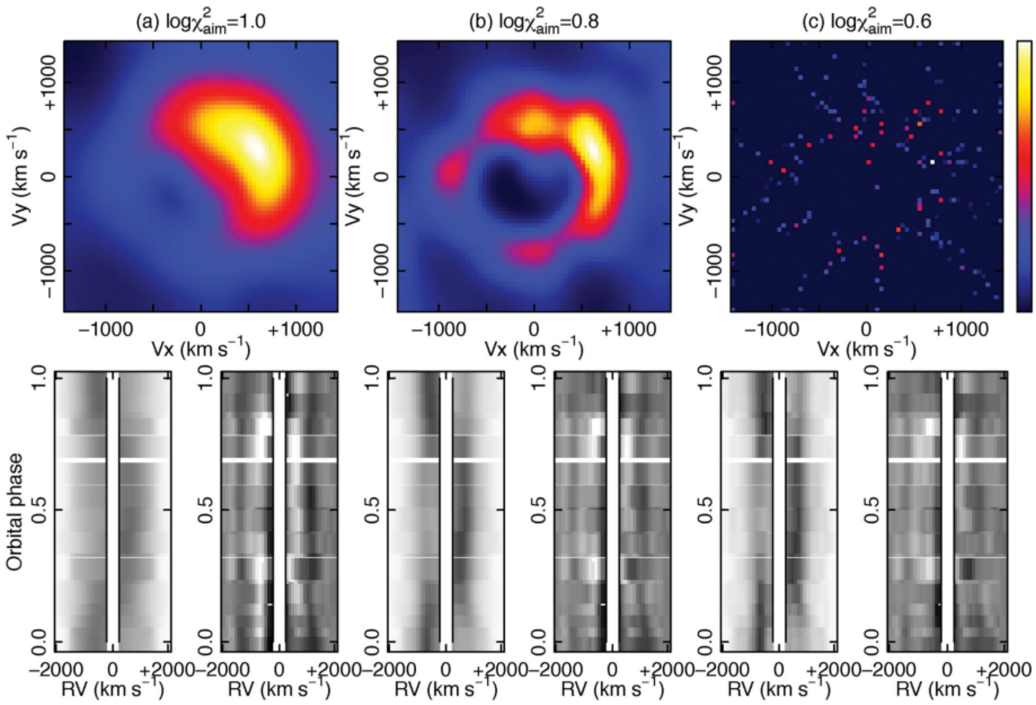

図 5: 図 4 と同じデータを使って MEM で得られた結果。[3]

ウェーブレット基底 ($\mathcal{W}$) でのスパース性、1 次微分空間でのスパース性 (TVM: Φ_{TVM}) を組み合わせた以下のようなモデルが応用されています。

$$\hat{\boldsymbol{s}} = \arg\min_{\boldsymbol{s}} \left\{ \|\boldsymbol{d} - A\boldsymbol{s}\|_2^2 + \lambda_1 \|\boldsymbol{s}\|_1 + \lambda_2 \|\mathcal{W}\boldsymbol{s}\|_1 + \lambda_3 \Phi_{\mathrm{TVM}}(\boldsymbol{s}) \right\}. \tag{7}$$

体内の各部位に対して、ハイパーパラメータ λ_1, λ_2, λ_3 を調整することで、より良い医療用画像を得ることができます。さて、しかし自然科学の場合、パラメータ λ によって結果が大きく変わるのは問題です。実際、図 4 からもわかるように、ドップラーマップはパラメータ λ を変えると変わってしまいます。このような問題に対して、データから最適な λ を見つけることは可能です。次章ではその手法について紹介します。

参考文献

[1] T. R. Marsh. Doppler tomography. In H. M. J. Boffin, D. Steeghs, and J. Cuypers, editors, *Astrotomography, Indirect Imaging Methods in Observational Astronomy*, p. 1. Springer-Verlag, 2001.

[2] D. Nogami and T. Iijima. Dramatic Spectral Evolution of WZ Sagittae during the 2001 Superoutburst. *PASJ*, Vol. 56, p. 163, March 2004.

[3] M. Uemura, T. Kato, D. Nogami, and R. Mennickent. Doppler tomography by total variation minimization. Vol. 67, p. 22, April 2015.