

応用例から少し離れて・・・

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \min_{\mathbf{s}} \{ \|\mathbf{d} - A\mathbf{s}\|_2^2 + \lambda\Phi \}$$

λ によって結果は変わる

パワースペクトル推定：信号の数

電波干渉計：画像のスパース度

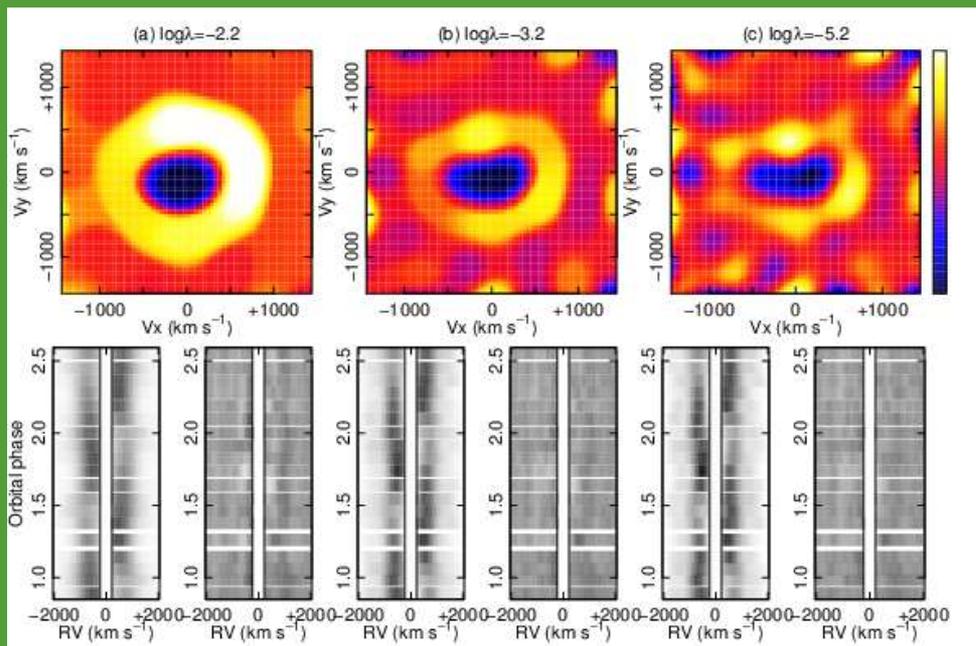
ドップラートモグラフィー：マップの複雑さ

どのようにして λ を決めるべきか

= モデル選択

情報量規準 (AIC, BIC)

交差検証法



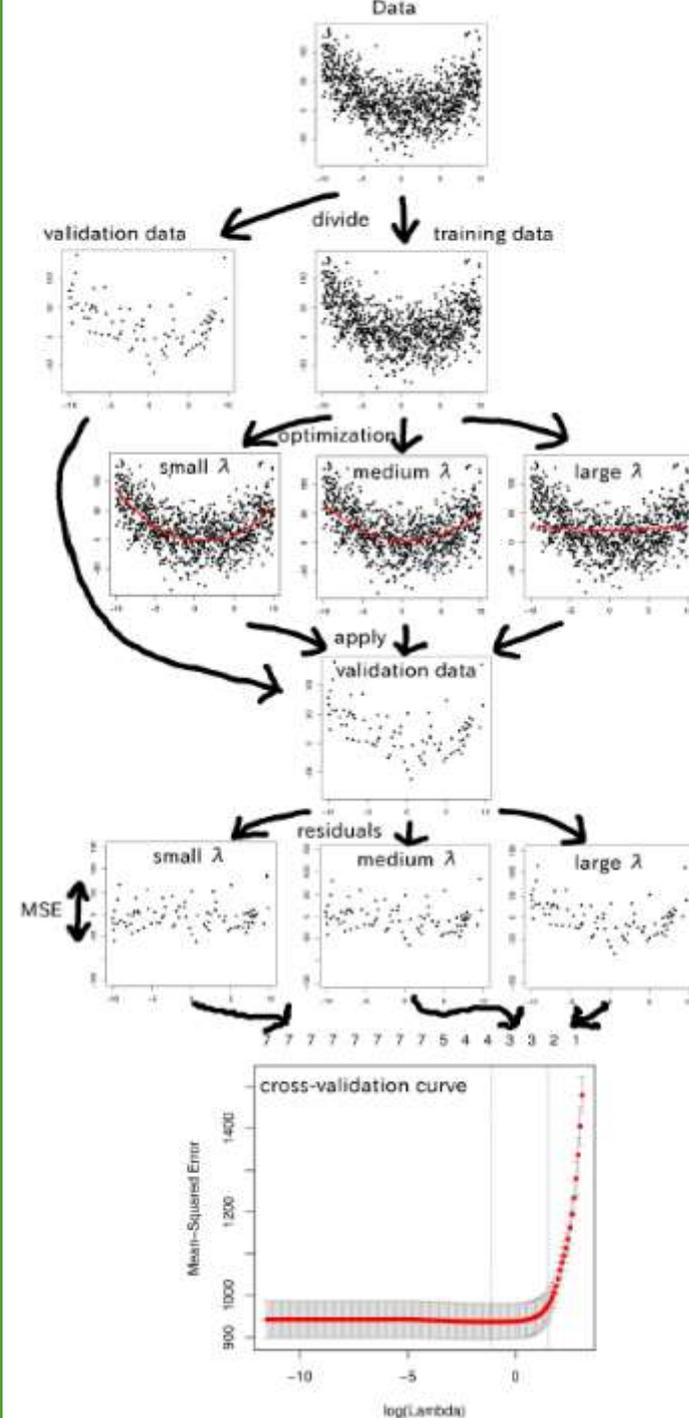
交差検証 (Cross-Validation)

λ が大きすぎる \rightarrow 変数が少なすぎてデータを説明できない

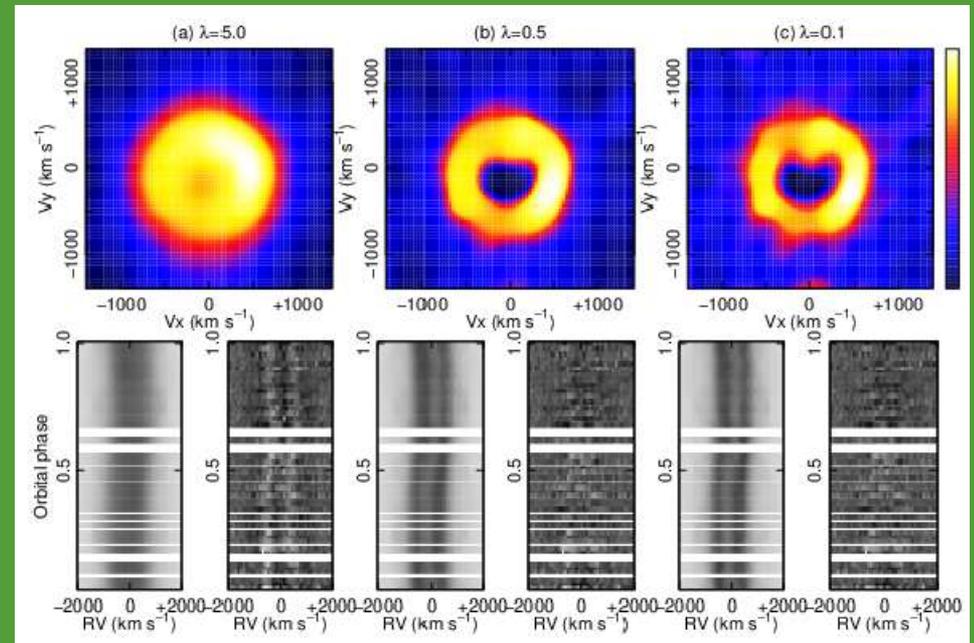
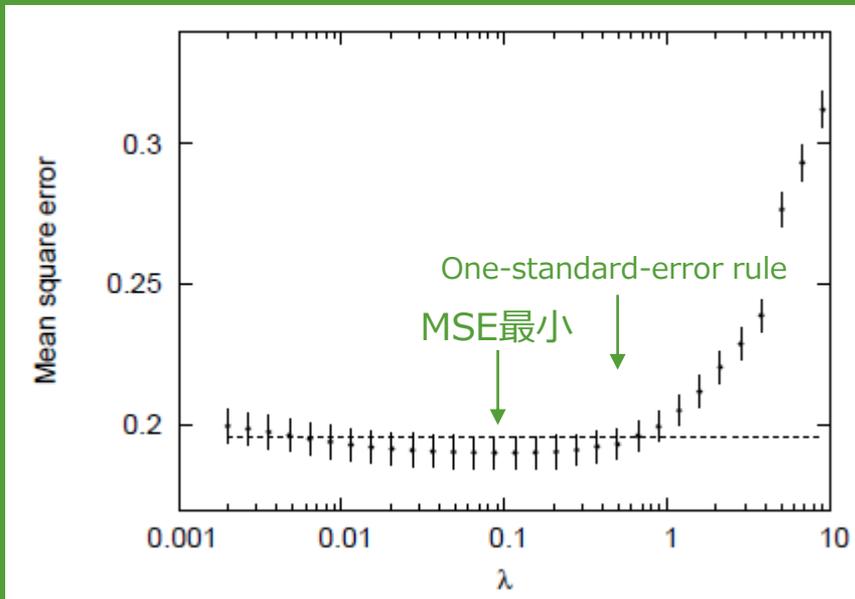
λ が小さすぎる \rightarrow 変数が多すぎてデータのノイズまで説明してしまう (過適合)

10-fold CV の手順

1. データを10分割する。
2. 9個の学習用サブデータでモデルパラメータを決定。
3. 残り1個の検証用サブデータとモデルの残差などからモデルの予測誤差を評価 (MSEなど)
4. 検証用のサブデータを変えることで10回計算。誤差の平均と標準偏差が得られる。
5. 2~4を様々な λ に対して計算。誤差最小の λ を探す。
6. 標準偏差内で最も変数の少ないモデルを選ぶ (one-standard-error rule)



ドップラートモグラフィーの場合



CV は使える問題の範疇が広いので、とても便利
一方で、MSE最小が良いのか、one-standard-rule が良いのか、その理由は厳密にはない。

また、サブデータに分割する際に乱数を使うため、特にサンプル数が少ないと
試行ごとに結果が変わることも (→ leave-one-out CV)
計算時間がかかる (→ AIC, etc.)

Outline

情報のスパース性を利用して解けない問題を解いてしまう

周期的な変光星のパワースペクトル推定

Kato & Uemura, 2012, PASJ, 64, 122

電波干渉計の画像再構成

Honma, Akiyama, Uemura, & Ikeda, 2014, PASJ, 66, 95

ドップラー・トモグラフィ

Uemura, Kato, Nogami, & Mennickent, 2015, PASJ, 67, 22

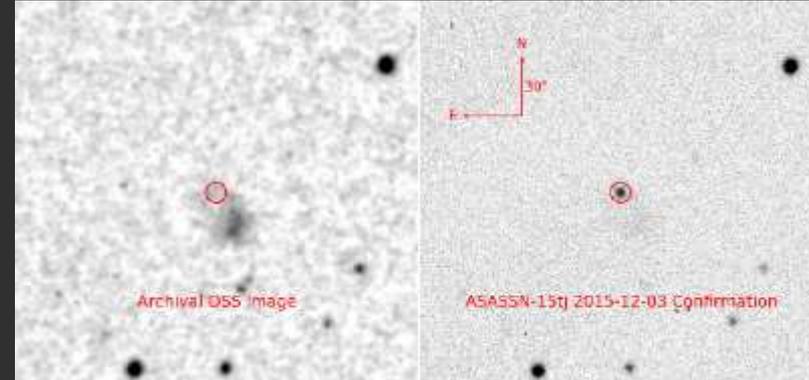
データから重要な説明変数を選択する

la型超新星の極大等級の変数選択

Uemura, Kawabata, Ikeda, Maeda, 2015, PASJ, 67, 55

宇宙の灯台としてのIa型超新星

From "bright supernova" Web site



$$f = \frac{L}{4\pi d^2}$$

全ての超新星で
同じ光度

実際は星間物質による減光や宇宙論的効果を考慮

↓
銀河までの距離

2011年ノーベル物理学賞 → 超新星を用いた、宇宙の加速膨張の発見

極大等級の標準化

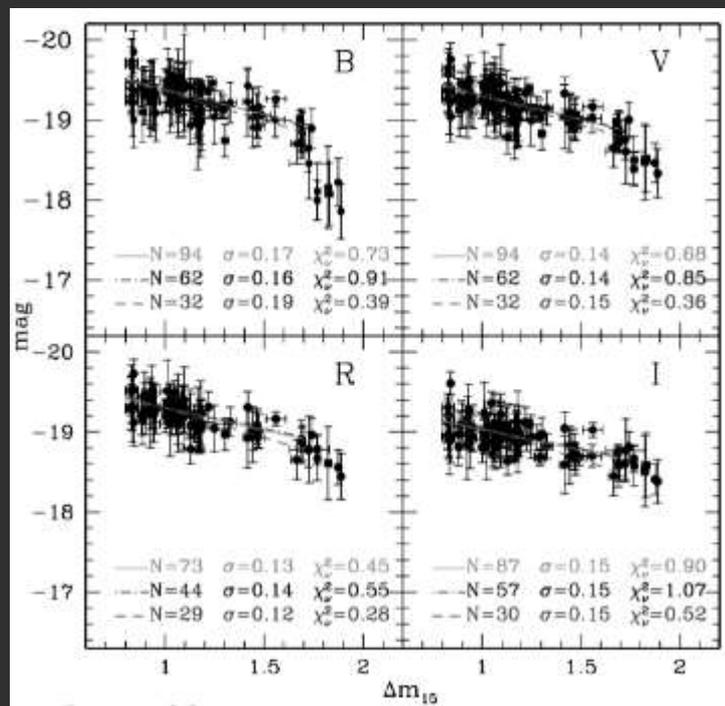
色（星間減光、星間赤化）と減光速度の関数

Phillips 93, Hamuy+96, Prieto+06

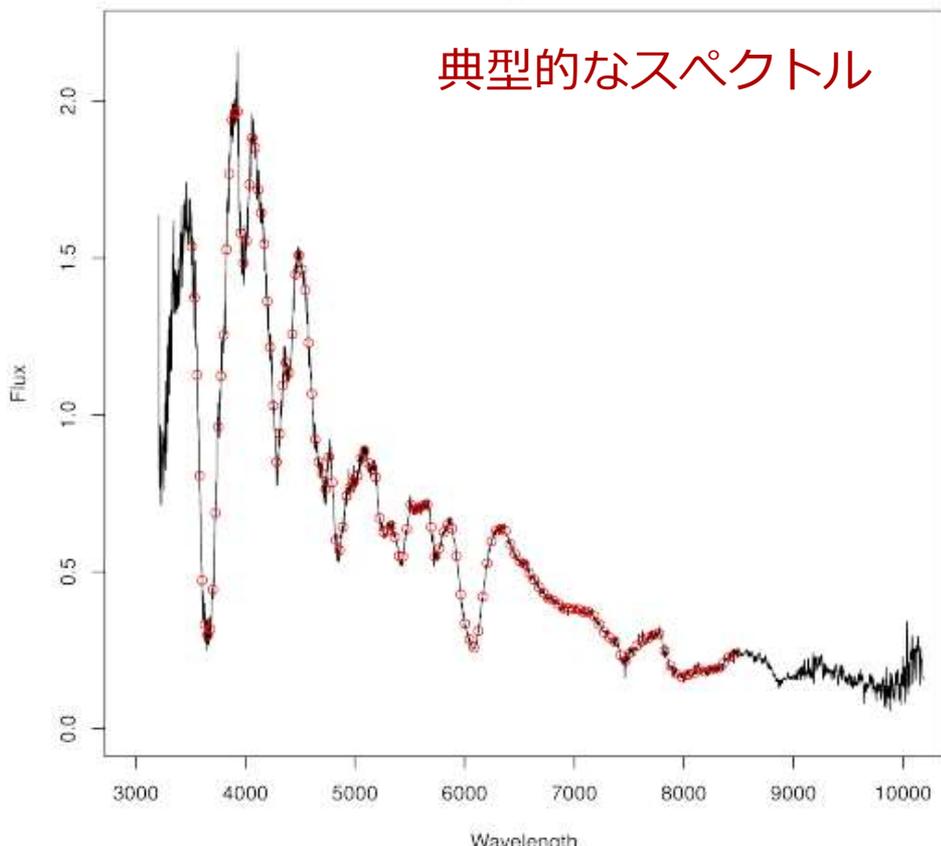
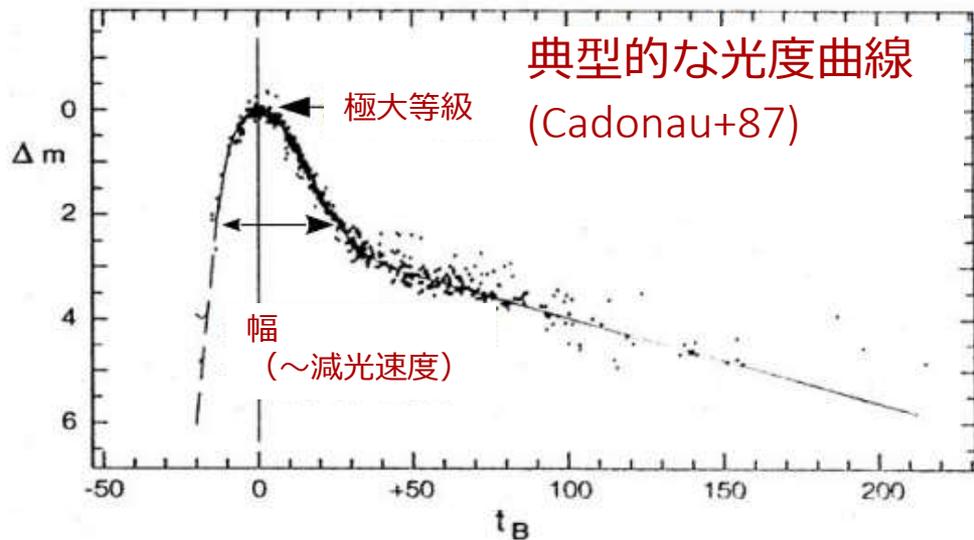
、他の説明変数？

「第3の変数」を探す研究

← 良質のスペクトルデータ



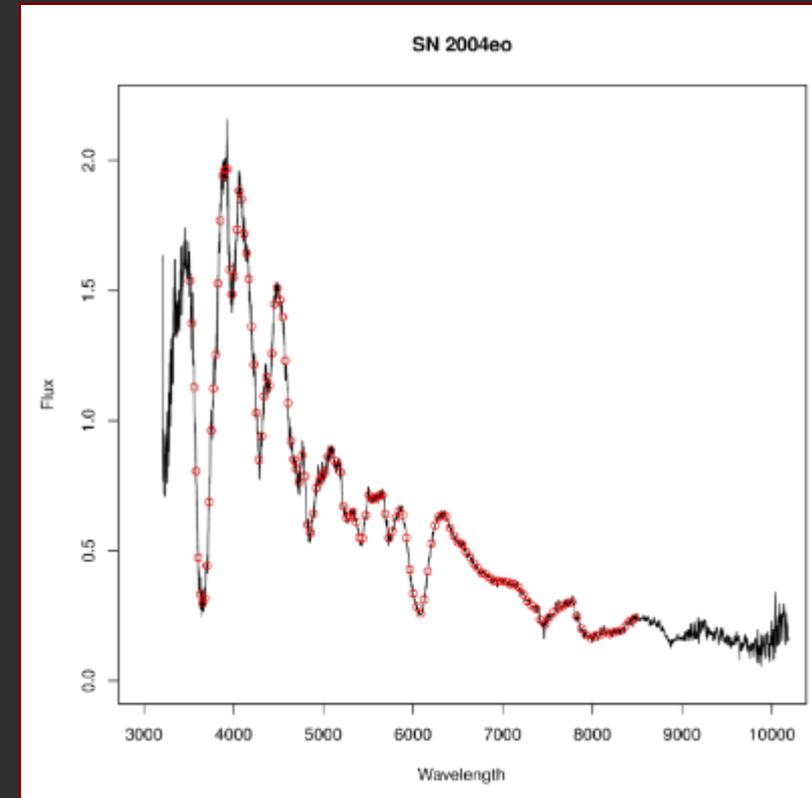
Prieto+06



どの変数がモデルを改善するか？

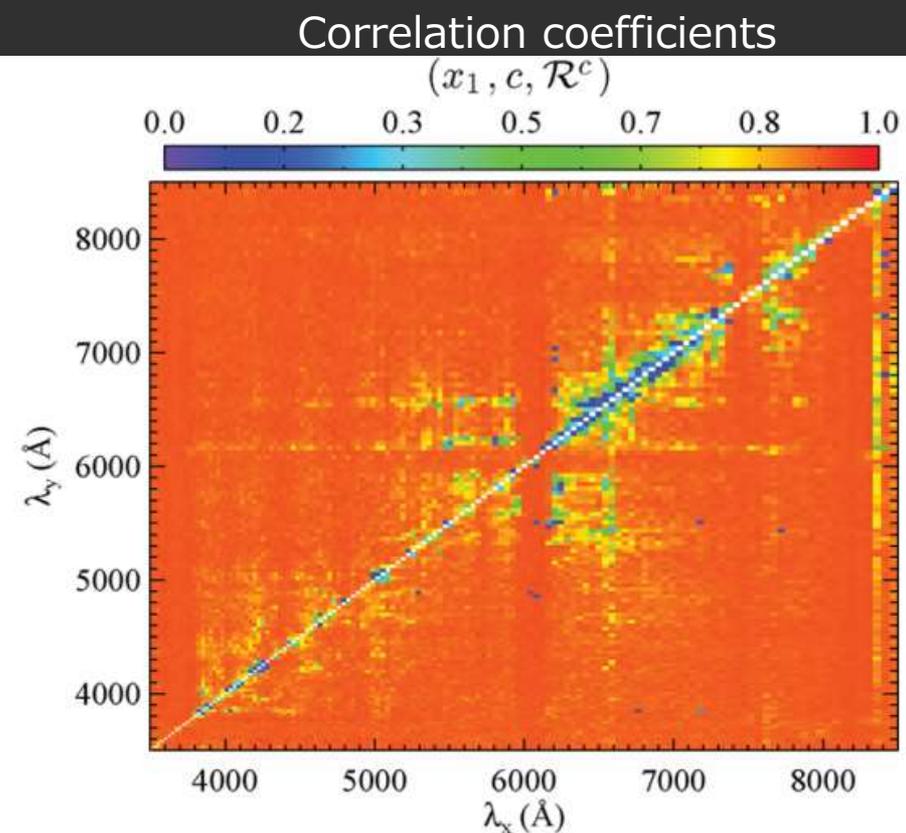
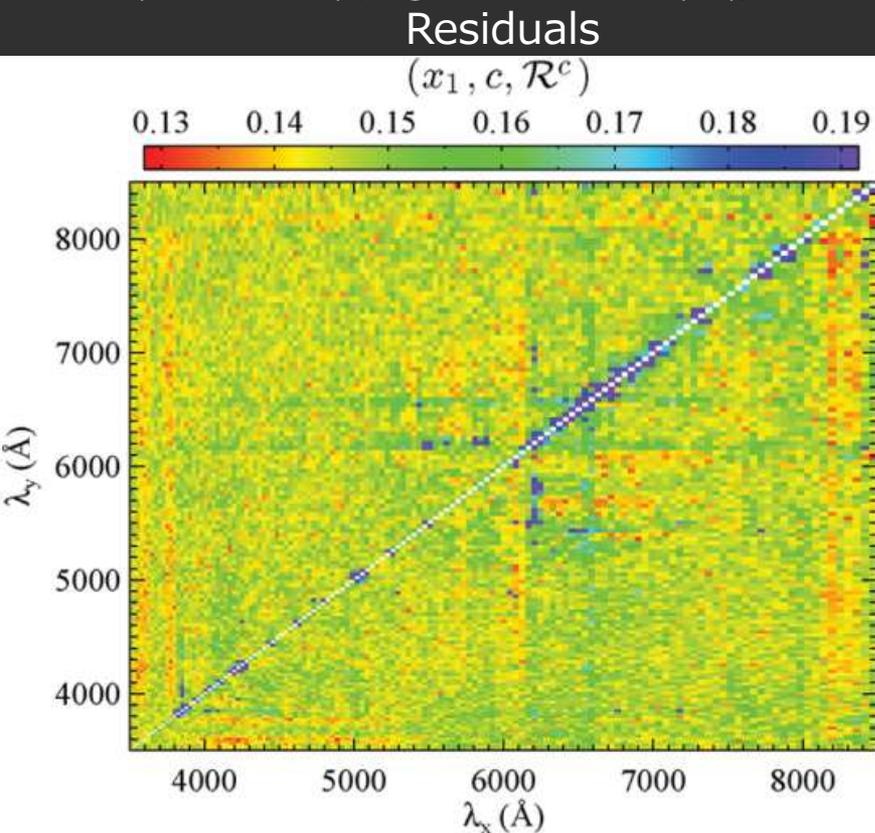
According to Silverman+12 (BSNIP III),

- Si II 6355 吸収線から測る膨張速度 (Blondin+11)
- Ca II H&K 吸収線から測る膨張速度 (Foley&Kasen 11)
- S II “W” 吸収線の青側の深さ (Blondin+11)
- Si II 4000 吸収線の等価幅 (Arsenijevic+08, Walker+11, Chotard+11, Nordin+11, Walker+11)
- Fe II, Mg II 吸収線の等価幅(Nordin+11)
- Si II 5972, 6355吸収線の等価幅 (Hachinger+06, Nordin+11)
- Si II 吸収線の等価幅の比 $EW(5972)/EW(6355)$, Ca II H&K 吸収線のフラックス比 (Fr/Fb) (Nugent+95, Hachinger+06)
- Si と s のフラックス比 $Fr(S II “W”)/Fr(Si II 6355)$ (Bongard+06)
- s と Si の等価幅の比 $EW(S II “W”)/EW(Si II 5972)$, Si と Fe の等価幅の比 $EW(Si II 5972)/EW(Fe II)$ (Hachinger+06)
- 任意のフラックス比から良い変数を探す (Bailey+09)



任意のフラックス比を使った先行研究

- Bailey+09, Silverman+12 (BSNIP III)
- 波長 $\lambda_{3500-8500}$ のスペクトルを 134 bin に区切って、134x133 通りの任意のフラックス比を計算する
- 極大等級との相関係数が最も高い変数を探す。
- $R(3750/4550)$, Lightcurve width (x1), & color (c) が最適



変数選択の問題として

$$\begin{pmatrix} MB_{SN1994S} \\ MB_{SN1995E} \\ \vdots \\ MB_{SN2008s1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x1_{SN1994S} & c_{SN1994S} & EW_{SiII4000,SN1994S} & FWHM_{SiII4000,SN1994S} \\ x1_{SN1995E} & c_{SN1995E} & EW_{SiII4000,SN1995E} & FWHM_{SiII4000,SN1995E} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x1_{SN2008s1} & c_{SN2008s1} & EW_{SiII4000,SN2008s1} & FWHM_{SiII4000,SN2008s1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{x1} \\ c_c \\ c_{EW} \\ c_{FWHM} \\ c_{3535/3512} \\ c_{3558/3512} \\ \vdots \\ c_{8416/8472} \end{pmatrix}$$

- 極大等級は説明変数候補の線形結合。
- 任意のフラックス比を含めるとサンプル数よりも変数の方が多くなる。
- 我々が知りたいのは極大等級を決める少数の変数の組み合わせ
→ 係数ベクトルはスパース！ L_1 正則化で解こう

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min \|\mathbf{y} - A\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_1$$

- データは UC Berkeley の超新星データベースより。

モデル

説明変数

色

光度曲線の幅 (～減光率)

連続光成分で規格化されたスペクトル

線スペクトルの情報

総フラックスで規格化されたスペクトル

局所的な色の情報

先行研究で提案されているフラックス比

合計 276 個の説明変数候補

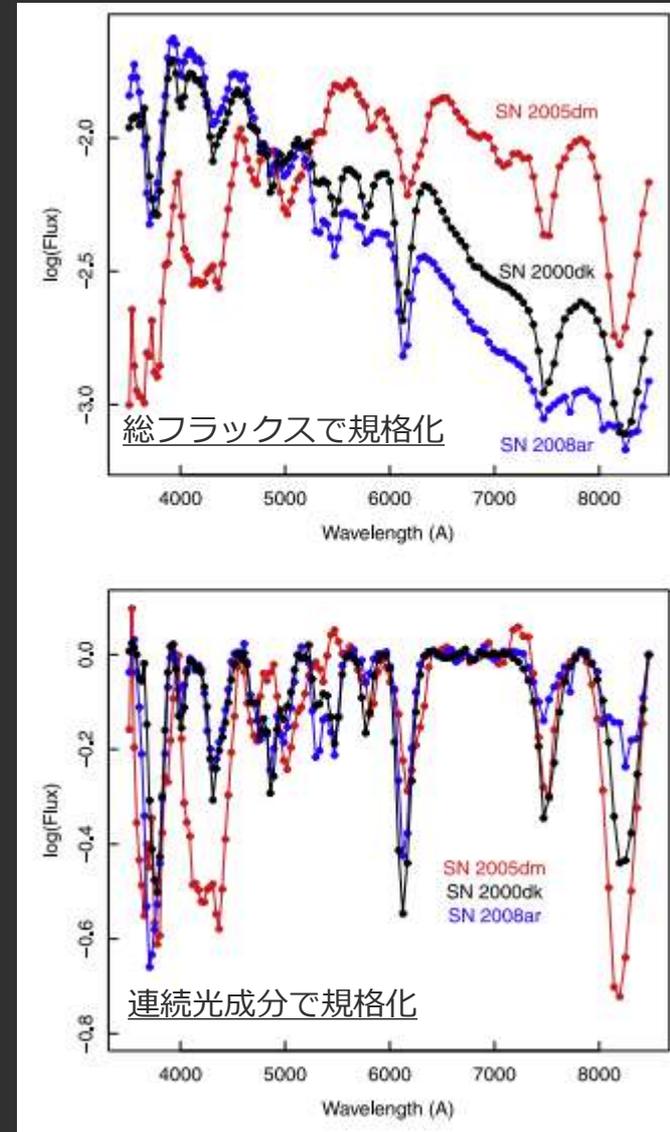
目的変数

UC Berkeleyの超新星データベースから、

78 天体の極大等級

モデル選択

L1 正則化 + Cross-Validation



結果

$$\begin{aligned}
 M_B = & M_{B,0} + \beta_1 c + \beta_2 x_1 \\
 & + \beta_3 f_{\text{tot}}(3512) + \beta_4 f_{\text{tot}}(3534) + \dots + \beta_{136} f_{\text{tot}}(8472) \\
 & + \beta_{137} f_{\text{cnt}}(3512) + \beta_{138} f_{\text{cnt}}(3534) + \dots + \beta_{270} f_{\text{cnt}}(8472) \\
 & + \beta_{271} \mathcal{R}(3780/4580) + \beta_{272} \mathcal{R}(4610/4260) \\
 & + \beta_{273} \mathcal{R}(5690/5360) + \beta_{274} \mathcal{R}(6420/4430) \\
 & + \beta_{275} \mathcal{R}(6420/5290) + \beta_{276} \mathcal{R}(6630/4400) + e. \quad (6)
 \end{aligned}$$



Non-zero elements	coefficients β	p
c	0.376	1.00
$f_{\text{tot}}(6373)$	0.100	1.00
x_1	-0.050	0.98
$f_{\text{cnt}}(6084)$	-0.034	0.98
$f_{\text{cnt}}(6289)$	-0.045	0.95
$f_{\text{cnt}}(6631)$	-0.061	0.80
$\mathcal{R}(3780/4580)$	-0.050	0.74
$f_{\text{tot}}(3752)$	0.063	0.73

全ての変数候補を使って解析

→従来モデルの「色」(c)と「減光率」(x1)の他に、スペクトルデータがいくつか選ばれる

最も係数の大きい「色」(c)で極大等級をあらかじめ補正して、再解析

→「減光率」(x1)のみ

→スペクトルデータは「色」と相関が強いだけで独立した変数ではない

「色」(c)と「減光率」(x1)で補正して再解析

→なにも選択されない = スペクトルデータはモデルを改善しない。

まとめ

(時間があれば「おまけ」があります)

* 情報のスパース性を利用して解けない問題を解いてしまう

知りたい情報 (1次元)
がスパース

知りたい画像
がスパース

知りたい画像が
スパース表現できる
基底がある (微分空間)

周期的な変光星のパワースペクトル推定

→ パワースペクトルのスパース性を利用してエイリアスを除去

電波干渉計の画像再構成

→ 電波輝度が天球面上でスパースな場合の超解像手法

ドップラー・トモグラフィー

→ TVM で局所的な構造を再構成

* データから重要な説明変数を選択する

Ia型超新星の極大等級の変数選択

→ データから最適な変数の組み合わせを推定

おまけ

うまくいかなかった・いまいちだった例

星が写っている画像のPSF deconvolution

望遠鏡の指向精度改良

星が写っている画像のPSF deconvolution

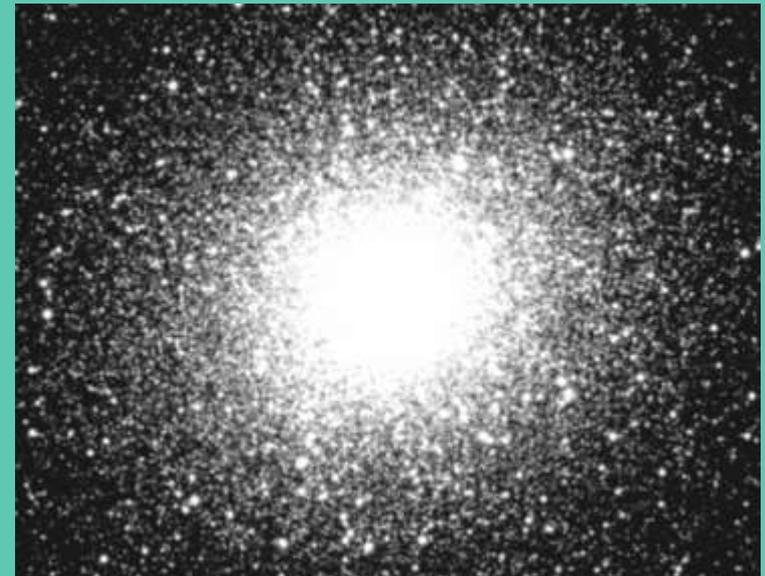
球状星団 M13

恒星 = 点光源

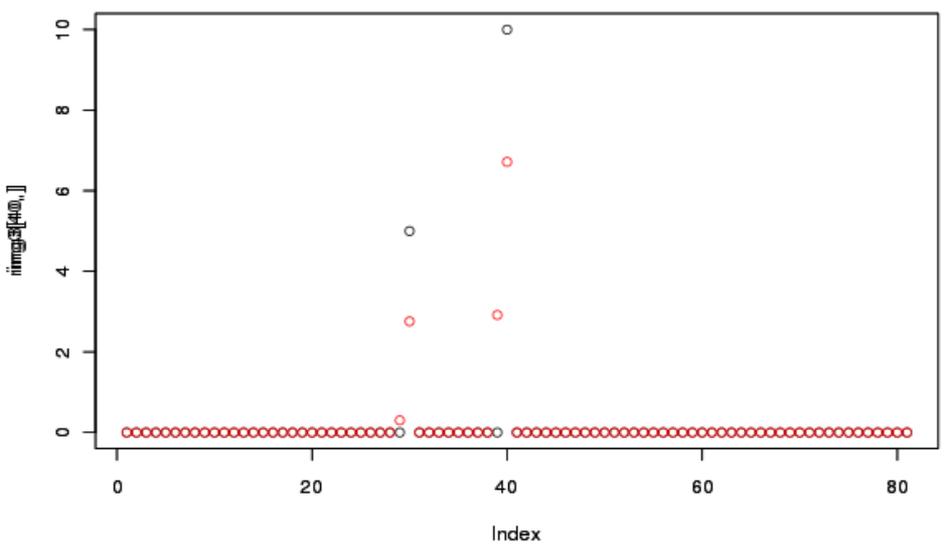
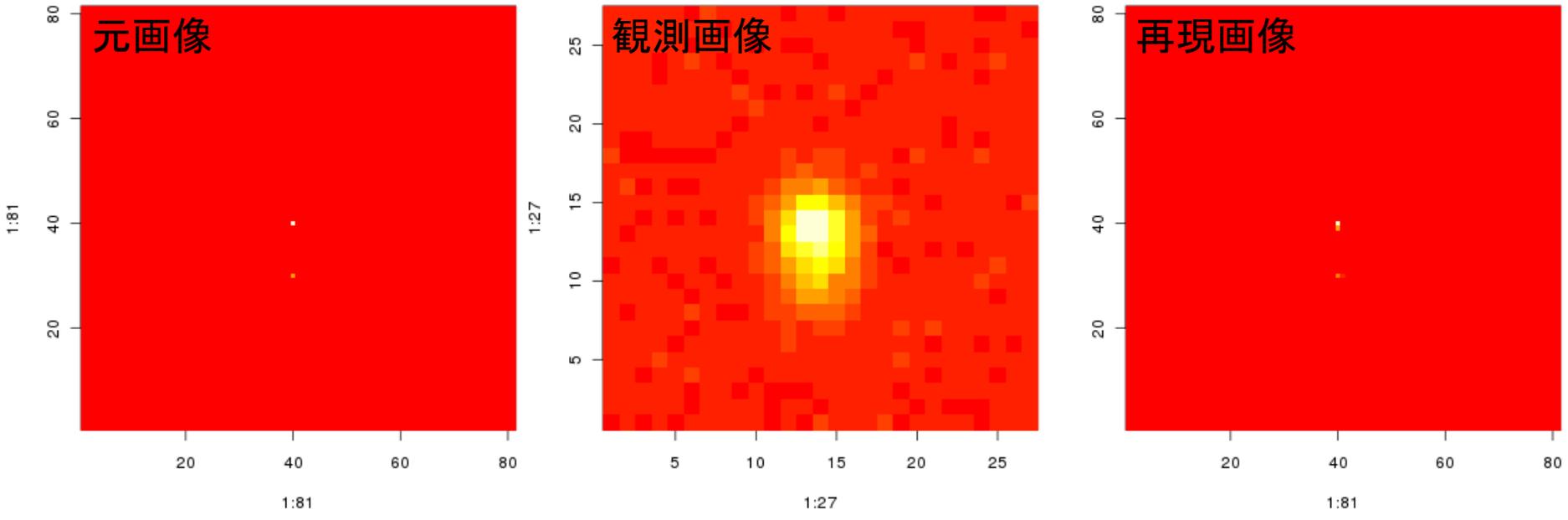
焦点面上での広がり (Point Spread Function: PSF)

← 波の (量子的な) 効果、大気の擾乱 (シーイング)、望遠鏡・観測装置の光学系の不完全さ

本来は点光源なので、PSF deconvolution にスパースを入れて、込み入った領域の点光源の分離に使えるか？



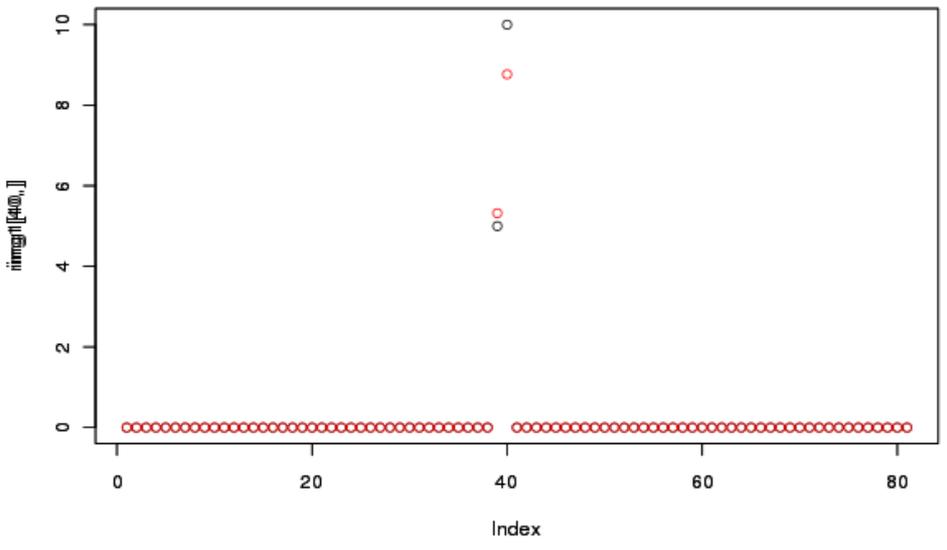
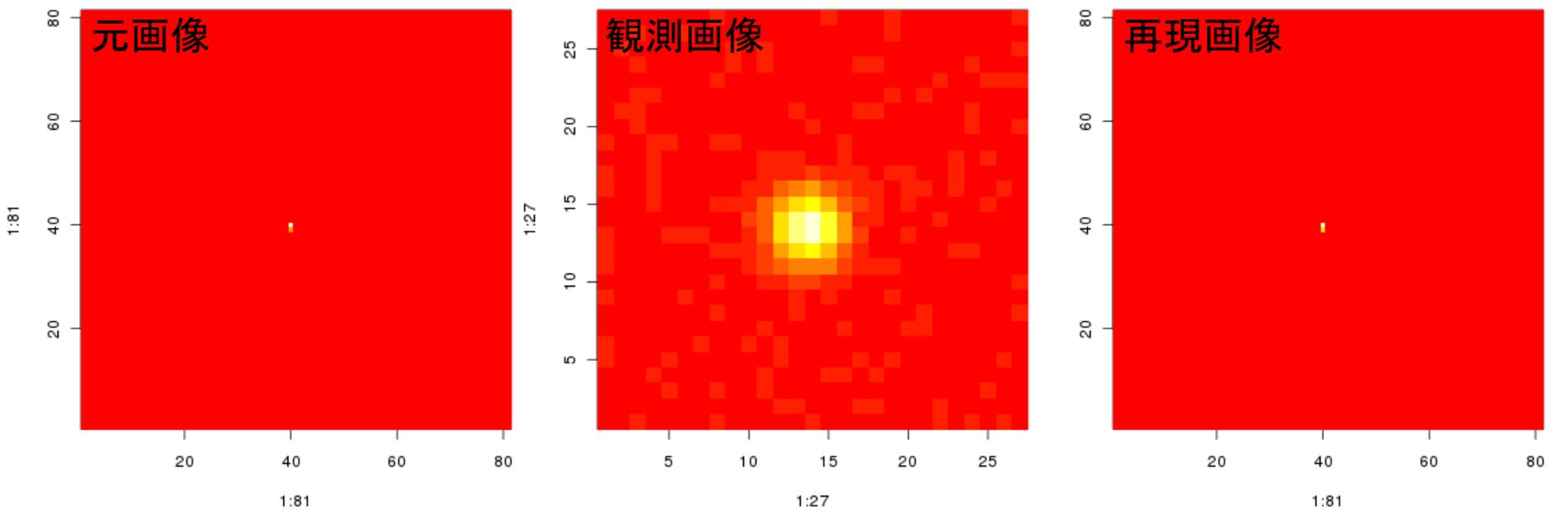
結果1/3 : シーイングサイズ分離れた2つの点源 15/48



← 点源のある列のフラックス
元画像(黒)、再現画像(赤)

位置はOKだが、本物の近くに偽の点源。
フラックスはやはり過小評価。

結果2/3：回折限界にある2つの点源

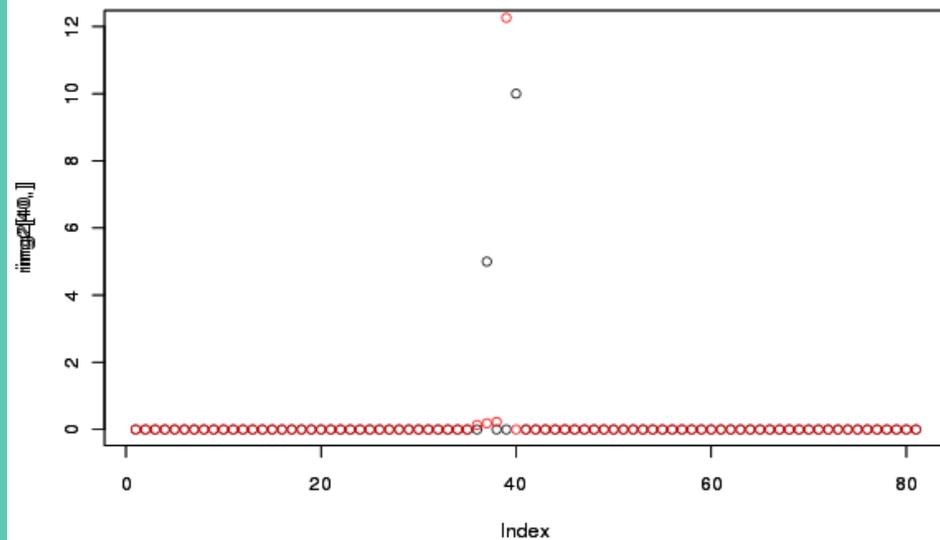
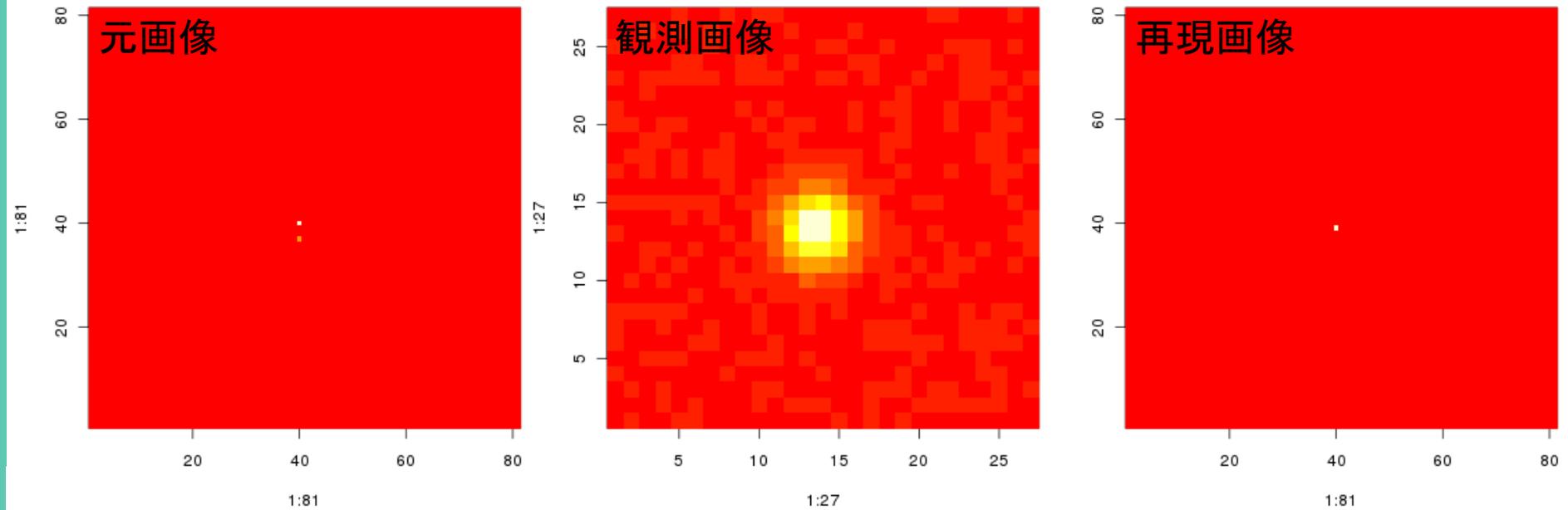


← 点源のある列のフラックス
元画像(黒)、再現画像(赤)

位置の再現OK。なぜか偽
信号もでない。

フラックスの再現度は悪い。

結果3/3：もうちょっと離れた2つの点源



← 点源のある列のフラックス
元画像(黒)、再現画像(赤)

明るい方の点源と暗い方の点源の間に1つの点源を作ってしまう。

ノイズに弱い。

結果補足

誤差が大きいとすぐに偽光源を作ってしまう。

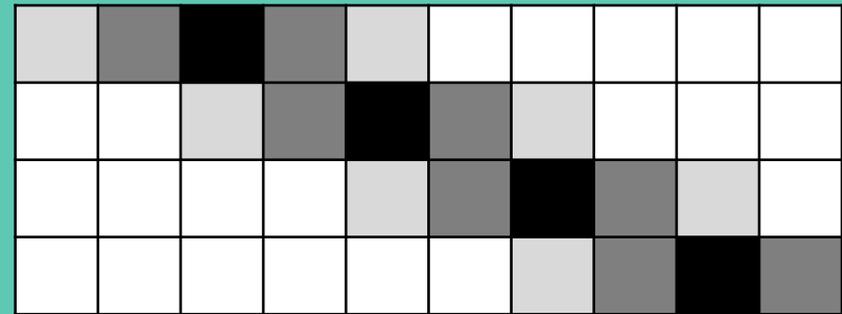
PSFが完全にわかっている（観測行列が既知）ことが重要だが、実際にはそういうことは少ない。

観測行列にゼロが多い

→ 元の光源の情報をもっている観測データの数が多くない。

← 周期解析・電波干渉計の問題と対照的

この問題の観測行列のイメージ



望遠鏡の指向精度改良

望遠鏡に求められる指向精度

大型望遠鏡の視野は通常数分角程度なので、数秒角程度の誤差で天体に向く必要がある。

しかし、ハード側の精度はそれほど高くない。

→天体の正しい座標と、望遠鏡が向いた座標の差を、ハード側のズレでモデル化し、フィードバックする。



説明変数

名称	意味	関数形
IA	方位軸の原点オフセット	$d(Az) = -IA$
IE	高度軸の原点オフセット	$d(EI) = +IE$
CA	光軸と高度軸の直角からのズレ	$d(Az) \sim -CA \cdot \sec(EI)$
AN	方位軸の南北方向の傾き	$d(Az) \sim -AN \cdot \sin(Az) \cdot \tan(EI)$ $d(EI) \sim -AN \cdot \cos(Az)$
AW	方位軸の東西方向の傾き	$d(Az) \sim -AW \cdot \cos(Az) \cdot \tan(EI)$ $d(EI) \sim +AW \cdot \sin(Az)$
NPAE	方位軸と高度軸の直角からのズレ	$d(Az) \sim -NPAE \cdot \tan(EI)$
TF	鏡筒のたわみ	$d(EI) = +TF \cdot \cos(EI)$
TX	鏡筒のたわみ(補正項)	$d(EI) = +TX \cdot \cot(EI)$
ACEC	方位軸の真の中心からの位置ズレ(cos成分)	$d(Az) = +ACEC \cdot \cos(Az)$
ACES	方位軸の真の中心からの位置ズレ(sin成分)	$d(Az) = -ACES \cdot \sin(Az)$
ECEC	高度軸の真の中心からの位置ズレ(cos成分)	$d(EI) = +ECEC \cdot \cos(EI)$
ECES	高度軸の真の中心からの位置ズレ(sin成分)	$d(EI) = +ECES \cdot \sin(EI)$
NRX	ナスミスローテータの回転軸と高度軸の水平方向ズレ	$d(Az) = -NRX$ $d(EI) = -NRX \cdot \sin(EI)$
NRY	ナスミスローテータの回転軸と高度軸の垂直方向ズレ	$d(Az) = -NRY \cdot \tan(EI)$ $d(EI) = +NRY \cdot \cos(EI)$

Az: Azimuth=方位
EI: Elevation=高度

モデル

方位 (Azimuth)

$$\begin{pmatrix} d(Az)_1 \\ d(Az)_2 \\ \vdots \\ d(Az)_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\sec(El_1) & -\sin(Az_1)\tan(El_1) & -\cos(Az_1)\tan(El_1) & -\tan(El_1) & \cos(Az_1) & -\sin(Az_1) \\ 1 & -\sec(El_2) & -\sin(Az_2)\tan(El_2) & -\cos(Az_2)\tan(El_2) & -\tan(El_2) & \cos(Az_2) & -\sin(Az_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -\sec(El_n) & -\sin(Az_n)\tan(El_n) & -\cos(Az_n)\tan(El_n) & -\tan(El_n) & \cos(Az_n) & -\sin(Az_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} IA \\ CA \\ AN \\ AW \\ NPAE \\ ACEC \\ ACES \end{pmatrix}$$

高度 (Elevation)

$$\begin{pmatrix} d(El)_1 \\ d(El)_2 \\ \vdots \\ d(El)_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos(Az_1) & +\sin(Az_1) & -\cos(El_1) & -\cot(El_1) & +\sin(El_1) \\ 1 & -\cos(Az_2) & +\sin(Az_2) & -\cos(El_2) & -\cot(El_2) & +\sin(El_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -\cos(Az_n) & +\sin(Az_n) & -\cos(El_n) & -\cot(El_n) & +\sin(El_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} IE \\ AN \\ AW \\ TF \\ TX \\ ECES \end{pmatrix}$$

結果

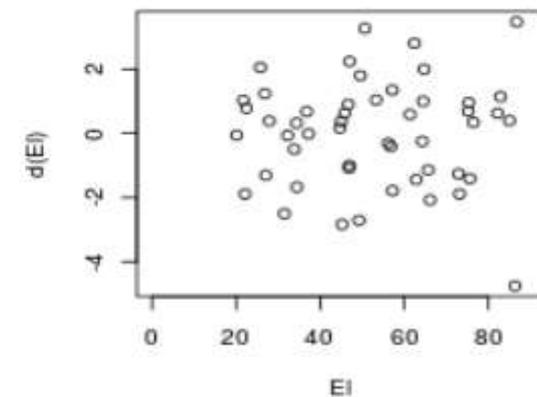
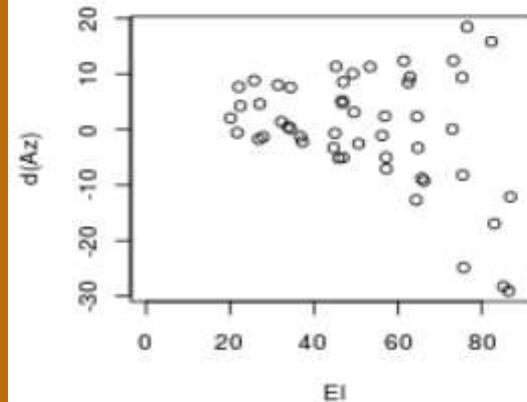
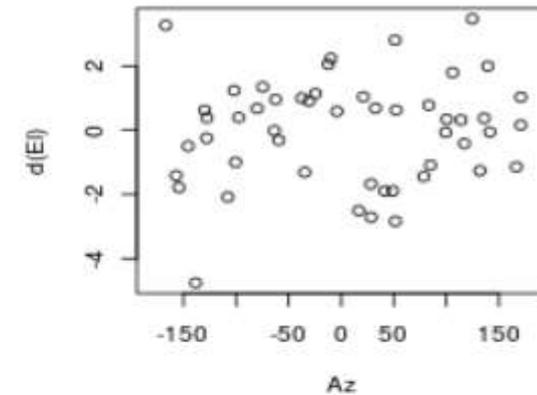
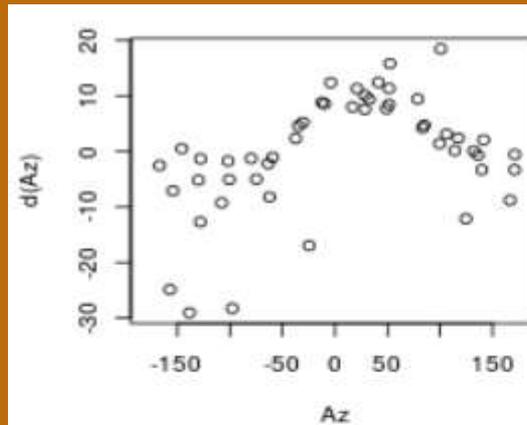
データ：50個

変数：11 or 13 個

→ あまりスパースでなかった

→ これくらいの変数なら全組み合わせを計算した方が良かったかも

	線形回帰	Lasso 1	Lasso 2
IA	178.11	177.30	177.30
IE	-192.33	-216.83	-183.74
CA	88.04	91.71	91.71
AN	-6.87	-5.79	-5.79
AW	-3.88	-3.07	-3.07
NPAE	4.59	0.02	0.02
TF	-28.80	-30.04	-22.60
TX	0.35	-6.14	0
ACEC	9.06	3.93	3.93
ACES	-6.33	-2.22	-2.22
ECES	6.89	30.59	0
csc(EI)	-	-	0
cos(2Az)	-	-	1.19



まとめ

* 情報のスパース性を利用して解けない問題を解いてしまう

知りたい情報 (1次元)
がスパース

知りたい画像
がスパース

知りたい画像が
スパース表現できる
基底がある (微分空間)

周期的な変光星のパワースペクトル推定

→ パワースペクトルのスパース性を利用してエイリアスを除去

電波干渉計の画像再構成

→ 電波輝度が天球面上でスパースな場合の超解像手法

ドップラー・トモグラフィー

→ TVM で局所的な構造を再構成

* データから重要な説明変数を選択する

Ia型超新星の極大等級の変数選択

→ データから最適な変数の組み合わせを推定