地球の熱史のシミュレーション

１．地球の冷却とパラメータ化対流モデル

パラメータ化対流モデルを利用して，地球の冷却史を計算する方法を考える。基礎となる微分方程式を導出する。

1.1 マントル対流と地球の冷却

マントル対流は地球内部の熱によって駆動される熱機関の１つである。マントルや核の対流によって地球内部の熱は地球外へ排出される。このときの熱排出量はマントル対流の活動度によって決まり，マントル対流は，ウランなどの放射性元素の崩壊熱による熱よりも多くの熱を運ぶため，地球が徐々に熱を失い，冷えてゆく。

1.2 冷却のボックスモデルとパラメータ化対流論

図１のように地球を大陸地殻・マントル・核の３つに分け熱収支を考える。海洋地殻の体積は小さいので，ここではその影響を無視している。冷却を考えるには，地殻・マントル・核を熱の入った箱と考えて，そこからの熱の出し入れだけを考えれば良い。このようなモデルをボックスモデルという。

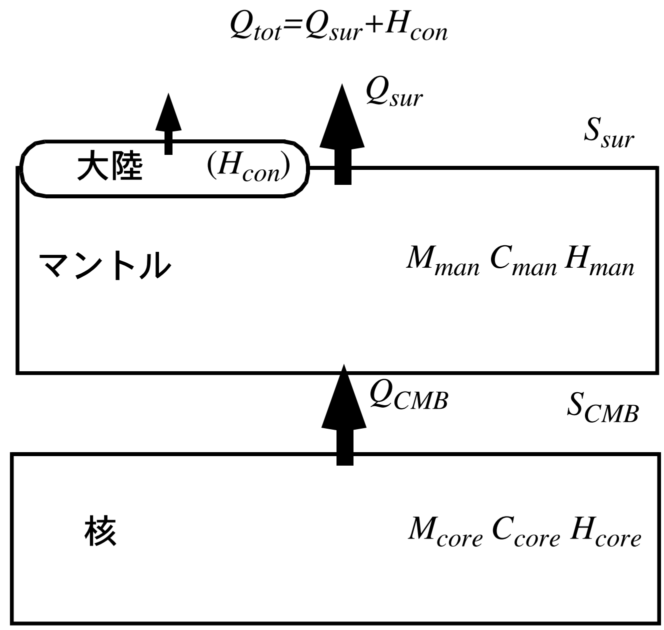


図１　地球のボックスモデル

ここで，M は質量，C は比熱を表し，添え字は大陸地殻(con)，マントル(man)，核(core)

を表す。また，Q は境界面からの熱流量 (熱の出入り)，S は面積を表し，添え字 sur は表面，CMB は核・マントル境界を表す。マントルの熱収支を表す式は，

$$M_{man}C_{man}\frac{d\bar{T}_{man}}{dt} = -Q_{sur} + Q_{CMB} + H_{man} \tag{1}$$

ここで，$\bar{T}_{man}$ はマントルの平均温度を，H_{man} は放射性元素の発熱量を表す。核については

$$M_{core}C_{core}\frac{d\bar{T}_{core}}{dt} = -Q_{CMB} + H_{core} \tag{2}$$

と表せる。ここではマントルの平均温度を，H_{core} は内核の固化により発生する熱を表す。

ボックスモデルを考えるときに重要なのは熱の出し入れの量である。これらはマントル対流の活動度によって変わる量である。対流の活発さはレイリー数という無次元の量で表される。レイリー数は

$$Ra = \frac{\rho_0 \alpha \Delta T g h^3}{\kappa\eta} \tag{3}$$

である。ここで，ρ_0 はマントルの平均密度，αは熱膨張率，ΔT は地表と CMB の温度差，g は重力加速度，h はマントルの厚さ，κは熱拡散率，ηは粘性率である。この中で，温度差は地球が冷えると小さくなる。一方，粘性率は

$$\eta = A\exp\left[\frac{H^*}{R\bar{T}}\right] \tag{4}$$

のように表される。ここで，A は比例係数，exp[x]は自然対数が底の指数関数 e^x，R は気体定数，H^*は活性化エンタルピーを表す。T は温度であり，(4)式は温度が低下すると粘性率は大きくなることを示している。つまり，地球が冷却するとレイリー数は小さくなり，このことは対流が徐々に活発でなくなって行くことを表している。

対流が不活発になると熱輸送量が低下し，熱の出入りが少なくなる。熱の出入りは，熱伝導率 k を用いて

$$Q_{sur} = k\frac{\Delta T_{sur}}{\delta}S_{sur} \tag{5}$$

$$Q_{CMB} = k\frac{\Delta T_{CMB}}{\delta}S_{CMB} \tag{6}$$

と表せる。ここで，ΔT_{sur} とΔT_{CMB} は地表と CMB の熱境界層の温度差を表す。ΔT_{sur} は図２の T_M と T_s との差である。δは熱境界層 (図２の thermal boundary layer) の厚さで

あり，レイリー数 Ra とパラメータβを使って，

$$\delta = hBRa^{-\beta} \tag{7}$$

のように結びつけられている*1。このように，複雑な現象を簡単な関係で表すことを**パラメータ化**と呼ぶ。ここで，B は比例係数である。指数$-\beta$はレイリー数，すなわち粘性率と熱輸送量との結合の強さを意味する。βがある程度大きいと，温度が下がると粘性率が高くなり，熱輸送効率が低下する。このため，マントル対流は，発熱量と熱輸送量がバランスするように温度を調節する働きを持っている。これらの式のほか，ΔT_{sur} と ΔT_{CMB} とを $\bar{T}$ に結びつける関係式，および，H_{man} と H_{coren} を計算する式があればマントルと核の温度を計算することができる。

*1 ここで，パラメータ化にヌッセルト数 Nu ではなくδを使うのは地球が球状であることを考慮するためである。内部加熱のない粘性率一定の球殻内のマントル対流では上面・下面ともδは同じ大きさになる。これは，isentropic core 内の渦度がラプラス方程式に従うことから来ている。

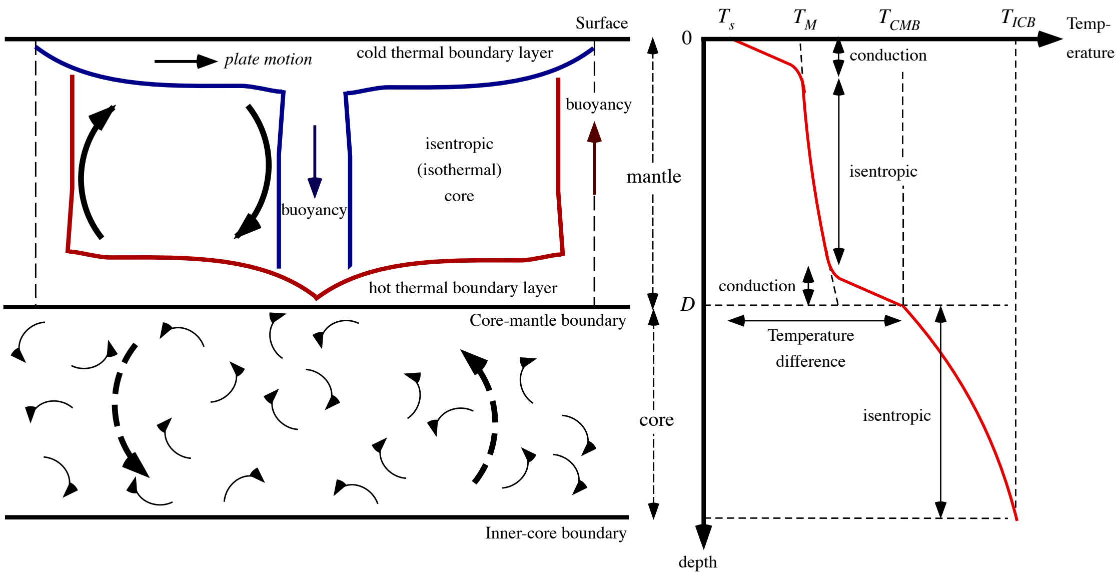


図２　地球の温度構造

２．パラメータ化対流モデルの数値解法

熱収支を表す式は時間の方向に関係なく解くことができる。つまり，過去から現在に向かう方向でも，現在から過去へさかのぼる方向でも計算できる。前者の場合は地球が始まったときの温度を与えて現在までの温度を解くことになり，後者の場合は現在の温度を与えて過去の温度を解くことになる。前者のような問題を初期値問題，後者のような問題を終端値問題という。

2.1 オイラー法による解法

実際の計算は，解析的に，すなわち，「紙と鉛筆を用いて」行うことはできない。このため，コンピュータを使用して数値的に解くことになる。ここでは，現在の値を与えて過去の温度を解く場合を考えてみよう。温度の時間変化は２つの常微分方程式(1)(2)で表されているが，式(1)に注目する。左辺の微分を時間差Δtでの有限差分で置き換えて，

$$\frac{d\bar{T}_{man}}{dt} = \frac{\Delta\bar{T}_{man}}{\Delta t} = \frac{\bar{T}^{n}_{man} - \bar{T}^{n-1}_{man}}{\Delta t} \tag{8}$$

とする。ここで，$\bar{T}^{n}_{man}$は計算している時間ステップtでのマントルの温度$\bar{T}_{man}(t)$を表し，

$\bar{T}^{n-1}_{man}$は１つ過去の時間ステップで$t-\Delta t$の温度$\bar{T}_{man}(t-\Delta t)$を表す。

Q_{sur}, Q_{CMB}→温度が決まると計算される量

H_{man}→時間で決まる量

であるが，時間tでの値，たとえば，$Q_{sur}(t)$とする。そうすると式(1)は

$$M_{man}C_{man}\frac{\bar{T}^{n}_{man} - \bar{T}^{n-1}_{man}}{\Delta t} = -Q^{n}_{sur} + Q^{n}_{CMB} + H^{n}_{man} \tag{9}$$

ここでも上付き添え字 n は時間ステップtでの値を表す。　式(9)は

$$\bar{T}^{n-1}_{man} = \bar{T}^{n}_{man} + \frac{\Delta t}{M_{man}C_{man}}\left(Q^{n}_{sur} - Q^{n}_{CMB} - H^{n}_{man}\right) \tag{10}$$

と変形できる。この式はタイムステップnに対する温度の漸化式となっていて，右辺の値は既知となっている。このため，終端の値$\bar{T}^{present}_{man}$が分かれば過去すべての時間での値を計算できる。このような解き方をオイラー法 (Euler method) という。

2.2 ルンゲ・クッタ法

オイラー法は１次精度と打ち切り誤差が大きいので，より高次の打ち切り誤差を持つ

方法が望ましい。しかし，式(1)(2)の右辺にある熱流量 Q は温度 T の非線型な関数である。つまり，未来の Q は計算するのは難しい。このため，クランク・ニコルソン法のような陰解法によって精度を上げることができない。このため，Q の予測値を作って仮の T を計算し，さらに Q に修正を加えることによって精度を上げる方法がとられる。つまり，行きつ戻りつ計算するのである。このような方法は予測子・修正子法とよばれる。

ここでは，時間が過去から未来方向へ進むとする。予測子ステップはオイラー法で計算する。つまり，

$$k_1 = -Q_{sur}^{n} + Q_{CMB}^{n} + H_{man}^{n} \tag{11}$$

$$M_{man} C_{man} \frac{\tilde{T}_{man}^{n+1} - \overline{T}_{man}^{n}}{\Delta t} = k_1 \tag{12}$$

で計算される値 $\tilde{T}_{man}^{n+1}$ を予測子とする。このあと，これを用いて

$$\tilde{Q}_{sur}^{n+1} = Q_{sur}\left(\tilde{T}_{man}^{n+1}, \tilde{T}_{core}^{n+1}\right) \tag{13}$$

$$\tilde{Q}_{CMB}^{n+1} = Q_{CMB}\left(\tilde{T}_{man}^{n+1}, \tilde{T}_{core}^{n+1}\right) \tag{14}$$

を計算した後，修正子ステップとして

$$k_2 = -\tilde{Q}_{sur}^{n+1} + \tilde{Q}_{CMB}^{n+1} + H_{man}^{n+1} \tag{15}$$

$$M_{man} C_{man} \frac{\overline{T}_{man}^{n+1} - \overline{T}_{man}^{n}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right) \tag{16}$$

のように計算される。この方法は２次の打ち切り誤差を持つ。

１つのタイムステップの途中も使って修正を加えるとより高次の打ち切り誤差を持つ方法を作ることができる。このような方法をルンゲ・クッタ法 (Runge-Kutta method)とよぶ。予測子・修正子法は２次の精度を持つルンゲ・クッタ法ということができる。連立常微分方程式を解くのに最もよく用いられる４次ルンゲ・クッタ法では，途中２つの中間ステップを用いて

$$M_{man} C_{man} \frac{\tilde{T}_{man}^{n+1/2} - \overline{T}_{man}^{n}}{\Delta t/2} = k_1 \tag{17}$$

$$\tilde{Q}_{sur}^{n+1/2} = Q_{sur}\left(\tilde{T}_{man}^{n+1/2}, \tilde{T}_{core}^{n+1/2}\right) \tag{18}$$

$$\tilde{Q}_{CMB}^{n+1/2} = Q_{CMB}\left(\tilde{T}_{man}^{n+1/2}, \tilde{T}_{core}^{n+1/2}\right) \tag{19}$$

$$k_2 = \tilde{Q}_{sur}^{n+1/2} + \tilde{Q}_{CMB}^{n+1/2} + H_{man}^{n+1/2} \tag{20}$$

$$M_{man} C_{man} \frac{\hat{T}_{man}^{n+1/2} - \overline{T}_{man}^{n}}{\Delta t/2} = k_2 \tag{21}$$

$$\hat{Q}_{sur}^{n+1/2} = Q_{sur}\left(\hat{T}_{man}^{n+1/2}, \hat{T}_{core}^{n+1/2}\right) \tag{22}$$

$$\hat{Q}_{CMB}^{n+1} = Q_{CMB}\left(\hat{T}_{man}^{n+1/2}, \hat{T}_{core}^{n+1/2}\right) \tag{23}$$

$$k_3 = \hat{Q}_{sur}^{n+1/2} + \hat{Q}_{CMB}^{n+1/2} + H_{man}^{n+1/2} \tag{24}$$

$$M_{man} C_{man} \frac{\widehat{T}_{man}^{n+1} - T_{man}^{n}}{\Delta t} = k_3 \tag{25}$$

$$\widehat{Q}_{sur}^{n+1} = Q_{sur}\left(\widehat{T}_{man}^{n+1}, \widehat{T}_{core}^{n+1}\right) \tag{26}$$

$$\widehat{Q}_{CMB}^{n+1} = Q_{CMB}\left(\widehat{T}_{man}^{n+1}, \widehat{T}_{core}^{n+1}\right) \tag{27}$$

$$k_4 = \widehat{Q}_{sur}^{n+1} + \widehat{Q}_{CMB}^{n+1} + H_{man}^{n+1} \tag{28}$$

$$M_{man} C_{man} \frac{T_{man}^{n+1} - T_{man}^{n}}{\Delta t} = \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \tag{29}$$

と計算する。途中の導関数の重みの割合 1,4=2+2, 1 がシンプソン法と同じになっている。これから説明するプログラムでもルンゲ・クッタ法を利用して解いている。

３．地球の冷却の数値シミュレーション

数値シミュレーションを行うには，プログラムの開発が必要である。以下は，開発したプログラムのパーツ (サブルーチン等) が何をするためのものであるかの説明である。

3.1 数値シミュレーションプログラムの概要

プログラムを解凍すると `Thermal_History` というディレクトリができる。プログラムは Fortran90 の自由形式で書かれている。Fortran90 は最初の高級言語である FORTRAN を拡張したもので，数値計算のプログラムを開発するのに向いた言語である。プログラムの名前はすべて `th_` で始まるようになっていて，`.f90` という拡張子がついている。プログラムは 1 つのメインプログラムと複数のサブルーチン・プログラム，モジュール・プログラムからなっている。

`th_RKF_Core.f90`	核の温度 $\bar{T}_{core}$ の式(2)をルンゲ・クッタ法で計算する
`th_RKF_Man.f90`	マントルの温度 $\bar{T}_{man}$ の式(1)をルンゲ・クッタ法で計算する
`th_Tmp_fact_C.f90`	核の表面温度 T_{CMB} から平均温度 $\bar{T}_{core}$ を計算するための係数を計算する
`th_Tmp_fact_M.f90`	マントルのポテンシャル温度 (プレート下の温度) から平均温度 $\bar{T}_{man}$ を計算するための係数を計算する
`th_add_physp.f90`	マントルの体積などの物理パラメータを計算する
`th_cal_ICB_Tmp.f90`	内核・外核境界の温度を計算する
`th_cal_ICB_radi.f90`	内核・外核境界の半径を計算する
`th_cal_ICB_rho.f90`	内核・外核境界の密度を計算する
`th_cal_IC_grate.f90`	内核半径の温度に対する微分係数を計算する
`th_cal_Qint.f90`	マントルの放射性元素による加熱量 H_{man} を計算する
`th_cal_Ra.f90`	マントル対流のレイリー数 Ra を計算する
`th_cal_Tp_D.f90`	核・マントル境界上のマントルの温度を計算する
`th_cal_heatf.f90`	Ra から地表と CMB の熱流量 Q_{sur}, Q_{CMB} を計算する
`th_cal_visc.f90`	マントルの粘性率を平均温度から計算する
`th_main.f90`	メインプログラム。サブルーチンを次々に呼び出し，時間進行を制御する
`th_mod_cswitch.f90`	スイッチに使う共通変数を宣言 (モジュール)
`th_mod_thermp.f90`	熱状態に関する物理量を入れる共通変数を宣言 (モジュール)
`th_mod_variables.f90`	時間変化する値を入れる共通変数を宣言 (モジュール)

`th_set_Ra_Nu.f90`	式(7)の B を現在の熱流量の観測に合う値に調節する
`th_set_Tmlt_C.f90`	核の融点を計算する
`th_set_cswitch.f90`	`th_cswitch.data` を読み，プログラムの制御スイッチをセットする
`th_set_physp.f90`	`th_phys_para.data` を読み，マントルの物性などの物理量をセットする
`th_set_therm_cond.f90`	`th_therm_para.data` を読み，終端温度など熱状態に関する物理量セットする

プログラムを動かすデータは３つで，その名前は th_で始まり，.data で終わる。

`th_cswitch.data`	プログラムの制御スイッチ
`th_phys_para.data`	マントルの物性などの物理量
`th_therm_para.data`	終端温度など熱状態に関する物理量

3.2 プログラムの実行

プログラムを開発した後は，プログラムを実行し，結果を何らかの形で図示する。プログラムを実行するためには，まず，実行形式ファイル (executable file) に変換する。

(1) ログインしたら端末を開く。

左上のアプリケーションメニュー→システム→端末

(2) ファイルをダウンロードして適当なディレクトリーにコピーして，解凍する。

```
tar xvf Thermal_History.tar
```

(3) ディレクトリ Thermal_History に移動する。

```
cd Thermal_History
```

(4) make コマンドを使ってプログラムをコンパイルする。コンパイルする際の順序などの手順は Makefile というファイルの中に書かれている

```
make
```

```
snowqueen:/home/nakakuki/Thermal_History(75)> ls
Makefile              th_cal_IC_grate.f90  th_mod_thermp.f90
dout1                 th_cal_Qint.f90      th_mod_variables.f90
th_RKF_Core.f90       th_cal_Ra.f90        th_phys_para.data
th_RKF_Man.f90        th_cal_Tp_D.f90      th_set_Ra_Nu.f90
th_Tmp_fact_C.f90     th_cal_heatf.f90     th_set_Tmlt_C.f90
th_Tmp_fact_M.f90     th_cal_visc.f90      th_set_cswitch.f90
th_add_physp.f90      th_cswitch.data      th_set_physp.f90
th_cal_ICB_Tmp.f90    th_main.f90          th_set_therm_cond.f90
th_cal_ICB_radi.f90   th_mod_cswitch.f90   th_therm_para.data
th_cal_ICB_rho.f90    th_mod_physp.f90
snowqueen:/home/nakakuki/Thermal_History(76)> make
```

図３　プログラムとコンパイル

(5) コンパイルされると th.out という名前の実行形式ファイルができているのでこれを確認する。

    ls

(6) プログラムを実行する

    ./th.out >& dout1 &

ここで，画面の出力を dout1 というファイルのリダイレクションしている。最後の “&” はバックグラウンド実行の意味である。

```
Terminal
ファイル(F)  編集(E)  表示(V)  検索(S)  端末(T)  ヘルプ(H)
_set_physp.o th_set_Ra_Nu.o th_set_therm_cond.o
snowqueen:/home/nakakuki/Thermal_History(77)> ls
Makefile              th_cal_ICB_radi.o    th_mod_cswitch.o
dout1                 th_cal_ICB_rho.f90   th_mod_physp.f90
mod_cswitch.mod       th_cal_ICB_rho.o     th_mod_physp.o
mod_physp.mod         th_cal_IC_grate.f90  th_mod_thermp.f90
mod_thermp.mod        th_cal_IC_grate.o    th_mod_thermp.o
th.out*               th_cal_Qint.f90      th_mod_variables.f90
th_RKF_Core.f90       th_cal_Qint.o        th_phys_para.data
th_RKF_Core.o         th_cal_Ra.f90        th_set_Ra_Nu.f90
th_RKF_Man.f90        th_cal_Ra.o          th_set_Ra_Nu.o
th_RKF_Man.o          th_cal_Tp_D.f90      th_set_Tmlt_C.f90
th_Tmp_fact_C.f90     th_cal_Tp_D.o        th_set_Tmlt_C.o
th_Tmp_fact_C.o       th_cal_heatf.f90     th_set_cswitch.f90
th_Tmp_fact_M.f90     th_cal_heatf.o       th_set_cswitch.o
th_Tmp_fact_M.o       th_cal_visc.f90      th_set_physp.f90
th_add_physp.f90      th_cal_visc.o        th_set_physp.o
th_add_physp.o        th_cswitch.data      th_set_therm_cond.f90
th_cal_ICB_Tmp.f90    th_main.f90          th_set_therm_cond.o
th_cal_ICB_Tmp.o      th_main.o            th_therm_para.data
th_cal_ICB_radi.f90   th_mod_cswitch.f90
snowqueen:/home/nakakuki/Thermal_History(78)> ./th.out >& dout1 &
[1] 26720
snowqueen:/home/nakakuki/Thermal_History(79)>
```

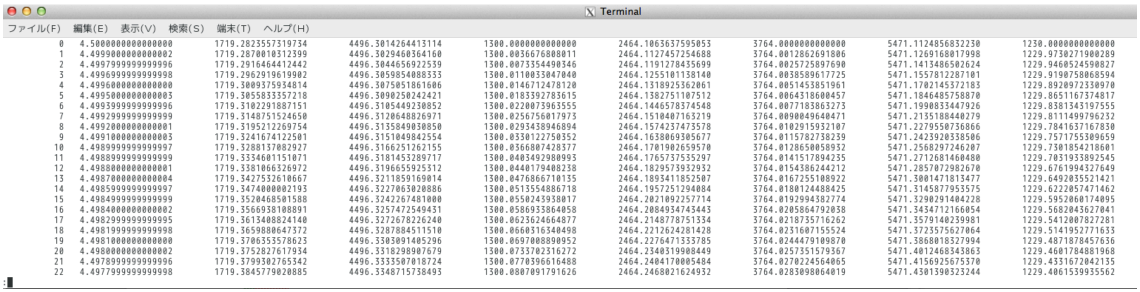
図４　プログラムの実行

3.3 結果の確認と可視化

計算結果は以下の３つのファイルに出力される。

`Heat_evo.data`	熱流量や発熱量
`RaNu_evo.data`	レイリー数とヌッセルト数 (熱流量を無次元化した量)
`Tmp_evo.data`	マントル・核の平均温度，ポテンシャル温度，内核半径など

それぞれのファイルは行ごとに，タイムステップ・時間 (単位 10 億年)・温度などのデータとなっている。


Terminal
ファイル(F)　編集(E)　表示(V)　検索(S)　端末(T)　ヘルプ(H)

0	4.5000000000000000	1719.2823557319734	4496.3014264413114	1300.0000000000000	2464.1063637595053	3764.0000000000000	5471.1124856832230	1230.0000000000000
1	4.4999000000000002	1719.2870010312399	4496.3029460364160	1300.0036676808011	2464.1127457254688	3764.0012862691806	5471.1269168017998	1229.9730271900289
2	4.4997999999999996	1719.2916464412442	4496.3044656922539	1300.0073354490346	2464.1191278435699	3764.0025725897690	5471.1413486502624	1229.9460524590827
3	4.4996999999999998	1719.2962919619902	4496.3059854088333	1300.0110033047040	2464.1255101138140	3764.0038589617725	5471.1557812287101	1229.9190758068594
4	4.4996000000000000	1719.3009375934814	4496.3075051861606	1300.0146712478120	2464.1318925362061	3764.0051453851961	5471.1702145372183	1229.8920972330970
5	4.4995000000000003	1719.3055833357218	4496.3090250242421	1300.0183392783615	2464.1382751107512	3764.0064318600457	5471.1846485758870	1229.8651167374817
6	4.4993999999999996	1719.3102291887151	4496.3105449230852	1300.0220073963555	2464.1446578374548	3764.0077183863273	5471.1990833447926	1229.8381343197555
7	4.4992999999999999	1719.3148751524650	4496.3120648826971	1300.0256756017973	2464.1510407163219	3764.0090049640471	5471.2135188440279	1229.8111499796232
8	4.4992000000000001	1719.3195212269754	4496.3135849030850	1300.0293438946894	2464.1574237473578	3764.0102915932107	5471.2279550736866	1229.7841637167830
9	4.4991000000000003	1719.3241674122501	4496.3151049842554	1300.0330122750352	2464.1638069305677	3764.0115782738239	5471.2423920338506	1229.7571755309659
10	4.4989999999999997	1719.3288137082927	4496.3166251262155	1300.0366807428377	2464.1701902659570	3764.0128650058932	5471.2568297246207	1229.7301854218601
11	4.4988999999999999	1719.3334601151071	4496.3181453289717	1300.0403492980993	2464.1765737535297	3764.0141517894235	5471.2712681460480	1229.7031933892545
12	4.4988000000000001	1719.3381066326972	4496.3196655925312	1300.0440179408238	2464.1829573932932	3764.0154386244212	5471.2857072982670	1229.6761994327649
13	4.4987000000000004	1719.3427532610667	4496.3211859169014	1300.0476866710135	2464.1893411852507	3764.0167255108922	5471.3001471813477	1229.6492035521421
14	4.4985999999999997	1719.3474000002193	4496.3227063020886	1300.0513554886718	2464.1957251294084	3764.0180124488425	5471.3145877953575	1229.6222057471462
15	4.4984999999999999	1719.3520468501588	4496.3242267481000	1300.0550243938017	2464.2021092257714	3764.0192994382774	5471.3290291404228	1229.5952060174095
16	4.4984000000000002	1719.3566938108891	4496.3257472549431	1300.0586933864058	2464.2084934743443	3764.0205864792038	5471.3434712166054	1229.5682043627041
17	4.4982999999999995	1719.3613408824140	4496.3272678226240	1300.0623624664877	2464.2148778751334	3764.0218735716262	5471.3579140239981	1229.5412007827281
18	4.4981999999999998	1719.3659880647372	4496.3287884511510	1300.0660316340498	2464.2212624281428	3764.0231607155524	5471.3723575627064	1229.5141952771633
19	4.4981000000000000	1719.3706353578623	4496.3303091405296	1300.0697008890952	2464.2276471333785	3764.0244479109870	5471.3868018327994	1229.4871878457636
20	4.4980000000000002	1719.3752827617934	4496.3318298907679	1300.0733702316272	2464.2340319908449	3764.0257351579367	5471.4012468343863	1229.4601784881968
21	4.4978999999999996	1719.3799302765342	4496.3333507018724	1300.0770396616488	2464.2404170005484	3764.0270224564065	5471.4156925675370	1229.4331672042135
22	4.4977999999999998	1719.3845779020885	4496.3348715738493	1300.0807091791626	2464.2468021624932	3764.0283098064019	5471.4301390323244	1229.4061539935562

:

図５　Tmp_evo.data の中身

さらにもう１つのデータは，以下のようなものである。

`add_phys_para.data`	入力した物理量から計算される付加的な物理量

データを見ただけではわかりにくいので，結果をグラフに表してみよう。計算結果を何らかの図に表すことを可視化という。グラフに表すには `gnuplot` というソフトウェアを用いると簡単である。ここでは，温度と内核の半径の時間変化をグラフ化してみよう。温度はというファイルに入っている。データは**図２**のようになっており，左から，

タイムステップ　時間マントル平均温度　核平均温度　マントルポテンシャル温度　CMB*マントル側温度　CMB 核側温度　ICB**温度　内核半径

* CMB: 核・マントル境界

** ICB: 内核・外核境界

となっている。まず，マントル・核の平均温度と内核半径をグラフにしてみる。手順は

次の通りである。

(1) gnuplot を起動する。

```
gnuplot
```

と入力するとプロンプトが gnuplot が起動して gnuplot のコマンド入力待ちになる。

```
snowqueen:/home/nakakuki/Thermal_History(61)> gnuplot

        G N U P L O T
        Version 4.6 patchlevel 2    last modified 2013-03-14
        Build System: Linux x86_64

        Copyright (C) 1986-1993, 1998, 2004, 2007-2013
        Thomas Williams, Colin Kelley and many others

        gnuplot home:     http://www.gnuplot.info
        faq, bugs, etc:   type "help FAQ"
        immediate help:   type "help"  (plot window: hit 'h')

Terminal type set to 'x11'
gnuplot>
```

図６　gnuplot の起動

(2) プロットのコマンドを入力してマントルの平均温度を描く。

```
plot 'Tmp_evo.data' using 2:3 with line
```

そうすると別ウィンドウが開いてグラフが現れる。

```
        gnuplot home:     http://www.gnuplot.info
        faq, bugs, etc:   type "help FAQ"
        immediate help:   type "help"  (plot window: hit 'h')

Terminal type set to 'x11'
gnuplot> plot 'Tmp_evo.data' using 2:3 with line
gnuplot> replot 'Tmp_evo.data' using 2:4 with line
gnuplot> replot 'Tmp_evo.data' using 2:9 with line
gnuplot>
```

図７　plot コマンドの入力

(3) 再プロットのコマンドを入力して核の平均温度と内核半径を描く。

```
replot 'Tmp_evo.data' using 2:4 with line

replot 'Tmp_evo.data' using 2:9 with line
```

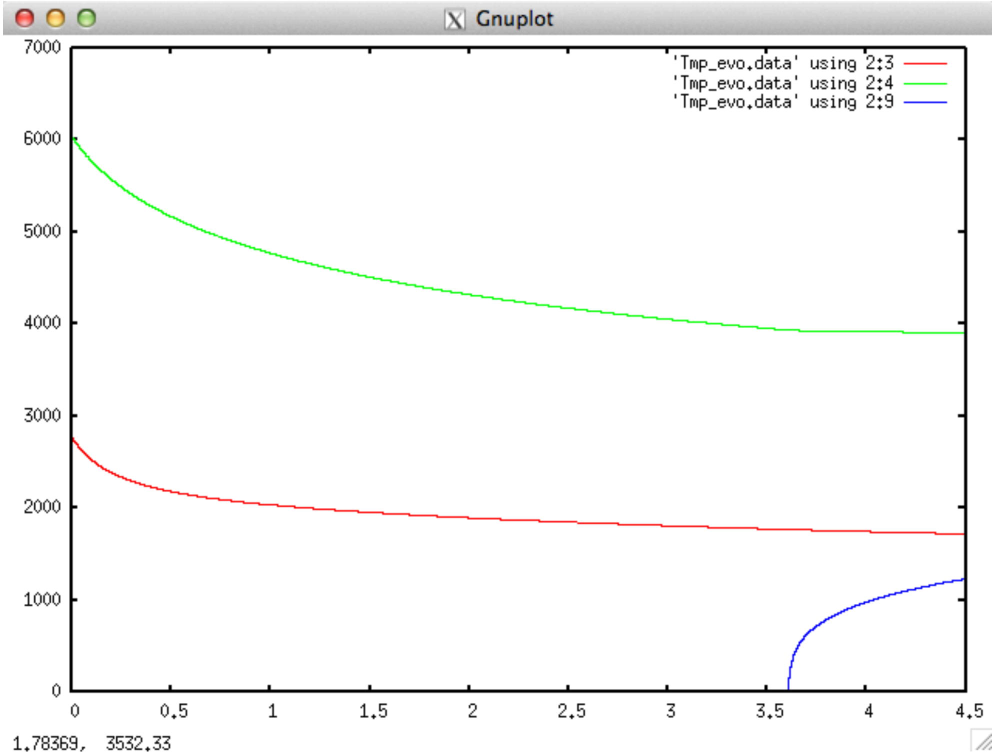


図8　得られたグラフ

(4) 画面キャプチャソフトウェアを起動して，作成したグラフのスクリーンショットを取得する

(i) 左上のアプリケーションメニュー→アクセサリー

→「スクリーンショットの取得」を起動

(ii) 「現在のウィンドウ」を選ぶ

(iii) 「取得するまでの待ち時間」を 1 秒以上にする

(iv) グラフのウィンドウが最前面にあることを確認する

(v) 「スクリーンショットの取得」を押す

(5) `gnuplot` を終了する

```
quit
```

問題１　マントルポテンシャル温度と CMB の温度（マントル側と核側）の温度をプロットしたグラフを作成せよ。

3.4 パラメータの変更

ここでは核の温度を変更してその影響を調べてみよう。核の温度を変更するには

th_therm_para.data を編集して値を変更しなければならない。

新しい計算を実行する前に今計算した結果を残しておこう。それには，次のような手順でデータを別のディレクトリにコピーする。

(1) mkdir model-20180810-01

(2) cp -p *.data model-20180810-01

ノートには model-20180810-01 がどのような計算か分かるような記録を残しておこう。

データを編集するには，エディタ gedit を用いる。gedit を起動するには

```
gedit th_therm_para.data &
```

と入力する。そうすると**図9**のようなウィンドウが開く。

核の温度を変更するには

```
'# (8) Reference or terminal temperature of the CMB [deg C] -> [K]'
3264.0d0
```

にある数字 3264.0d0 を変更する。この数値は現在の核・マントル境界の温度を与えている (計算が現在から過去に向かっていることを思い出しておこう)。200°C 下げて 3064.0d0 にしてみよう。さらに，

```
'# (8) Reference or terminal Urey ratio'
0.605
```

を 0.655d0 に変更する。これは核の温度を下げることにより核からの熱流量を減らす分，マントル内の放射性元素の加熱を増やしていることを意味している。

変更したら右上にある「保存(s)」ボタンを押して変更したデータを保存する。保存したあと，プログラムを実行すれば計算結果を得られる。

```
# **** Parameters to set thermal conditions *************************************
'# (1)  Number of time steps'
45000
'# (2)  Age or evolution duration of the planet [Ba]'
4.5d0
'# (3)  Absolute temperature of 0 degree C [K]'
273.0d0
'# (4)  Surface temperature of the planet [deg C]->[K]'
0.0d0
'# (5)  Inital potential temperature of mantle [deg C]->[K]'
1652.0d0
'# (6)  Inital potential temperature of the core [deg C]->[K]'
3752.0d0
'# (7)  Reference or terminal potential temperature of the mantle [deg C]->[K]'
1300.0d0
'# (8)  Reference or terminal temperature of the CMB [deg C]->[K]'
3264.0d0
'# (9)  Reference or terminal surface heat flux from the mantle [W]'
3.4d13
'# (10) Reference or terminal Urey ratio'
0.605d0
'# (11) Reference viscosity of mantle in the present [Pa s]'
1.0d22
'# (12) Reference or terminal radius of the inner core [m]'
1230.0d3
# **** End of the data ***********************************************************
```

図９　th_therm_para.data の内容

問題２　プログラムを実行して，結果を図示せよ。現在の核の温度が低いと仮定したことが，結果にどのような影響を与えたのか考察せよ。

参考文献

U. R. Christensen, Thermal evolution models for the Earth, *Journal of Geophysical Research*, vol. **94**, no. B4, 2995-3007, 1985.

D. J. Stevenson, T. Spohn, and G. Schubert, Magnetism and thermal evolution of the terrestrial planets, Icarus, vol. **54**, issue 3, 466-489, 1983.

４．熱史シミュレーションプログラムで用いた基礎方程式

4.1 熱収支の式

・マントルの熱収支の式

$$C_{Man}\frac{d\bar{T}_{Man}}{dt}=H-Q_{sur}+Q_{CMB} \tag{41}$$

・核の熱収支の式

$$C_{Core}\frac{d\bar{T}_{Core}}{dt}=-Q_{CMB}+H_{IC} \tag{42}$$

・地表の熱流量

$$Q_{sur}=S_{sur}Nu_0k\frac{T_{PM}-T_0}{h} \tag{43}$$

・核・マントル境界の熱流量

$$Q_{CMB}=S_{CMB}Nu_0k\frac{T_{CMB}-T_{D''}}{h} \tag{44}$$

・Nusselt 数

$$Nu_0=cRa_0^{\beta} \tag{45}$$

ここで，係数 c の値は現在の粘性率からレイリー数を計算したときに，熱流量が合うように決めている。

・レイリー数

$$Ra_0=\frac{\rho_0\alpha_M\left[\left(T_{PM}-T_0\right)+\left(T_{CMB}-T_{D''}\right)\right]gh^3}{\eta\kappa} \tag{46}$$

温度差は地表および核マントル境界でのポテンシャル温度からの差を合わせた値である。

・粘性率

$$\eta = A\exp\left[\frac{H}{R\bar{T}_{Man}}\right] \tag{47}$$

係数 A は粘性率の平均の取り方によって変化させる。

4.2 マントルの温度分布・平均温度とポテンシャル温度の変換係数

断熱温度勾配の式

$$\frac{dT_M}{dr} = -\frac{\alpha g_0 T_M}{C_{pM}} \tag{51}$$

より決定する。

・熱膨張率一定の場合の温度分布

$$T_M(r) = T_{PM}\exp\left[\frac{\alpha_M g_0 (R_0 - r)}{C_{pM}}\right] \tag{52}$$

核・マントル境界上では

$$T_{D''} = T_{PM}\exp\left[\frac{\alpha_M g(R_0 - R_{CMB})}{C_{pM}}\right] \tag{53}$$

・温度勾配一定の場合の温度分布

$$T_M(r) = T_{PM} + T_{PM}\frac{\alpha g}{C_{pM}}(R_0 - r) \tag{54}$$

マントルの平均温度とポテンシャル温度の変換係数は

$$T_{PM} = \Theta_{Man}\bar{T}_{Man} \tag{55}$$

とおいて Θ_{Man} を求める。平均温度は

$$\bar{T}_{Man} = \frac{1}{V_{Man}}\int_{R_{CMB}}^{R_0} T_M(r)S(r)dr \tag{56}$$

である。熱膨張率一定のときは

$$\bar{T}_{Man} = \frac{4\pi}{V_{man}}T_{PM}\exp\left[\frac{\alpha g}{C_{pM}}R_0\right]$$

$$\cdot\left[\left\{R_{CMB}^2\left(\frac{C_{pM}}{\alpha g}\right) + 2R_{CMB}\left(\frac{C_{pM}}{\alpha g}\right)^2 + 2\left(\frac{C_{pM}}{\alpha g}\right)^3\right\}\exp\left[-\frac{\alpha g}{C_{pM}}R_{CMB}\right]\right.$$

$$-\left\{R_0^2\left(\frac{C_{pM}}{\alpha g}\right)+2R_0\left(\frac{C_{pM}}{\alpha g}\right)^2+2\left(\frac{C_{pM}}{\alpha g}\right)^3\right\}\exp\left[-\frac{\alpha g}{C_{pM}}R_0\right]\Bigg] \tag{57}$$

であり，温度勾配一定のときは

$$\bar{T}(t)=T_p\left[1+\frac{\alpha g}{C_{pM}}R_0-\frac{3}{4}\frac{\alpha g}{C_{pM}}\frac{\left(R_0^4-R_{CMB}^4\right)}{\left(R_0^3-R_{CMB}^3\right)}\right] \tag{58}$$

となる。

・熱膨張率一定の場合の変換係数

$$\Theta_{Man}=\frac{V_{man}}{4\pi}\exp\left[-\frac{\alpha g R}{C_p}\right]$$

$$\div\Bigg[\left\{R_{CMB}^2\left(\frac{C_{pM}}{\alpha g}\right)+2R_{CMB}\left(\frac{C_{pM}}{\alpha g}\right)^2+2\left(\frac{C_{pM}}{\alpha g}\right)^3\right\}\exp\left[-\frac{\alpha g}{C_p}R_{CMB}\right]$$

$$-\left\{R_0^2\left(\frac{C_{pM}}{\alpha g}\right)+2R_0\left(\frac{C_{pM}}{\alpha g}\right)^2+2\left(\frac{C_{pM}}{\alpha g}\right)^3\right\}\exp\left[-\frac{\alpha g}{C_{pM}}R_0\right]\Bigg] \tag{59}$$

・温度勾配一定の場合の変換係数

$$\Theta_{Man}=1\Bigg/\left[1+\frac{\alpha g}{C_{pM}}R_0-\frac{3}{4}\frac{\alpha g}{C_{pM}}\frac{\left(R_0^4-R_{CMB}^4\right)}{\left(R_0^3-R_{CMB}^3\right)}\right] \tag{60}$$

4.3 核の温度分布・平均温度とポテンシャル温度の変換係数

・核の温度分布

$$T_C(r)=T_{CMB}\exp\left[\frac{1}{2}\frac{\alpha g_0}{C_p}\left(\frac{R_{CMB}^2-r^2}{R_{CMB}}\right)\right] \tag{61}$$

積分すると核の平均温度とポテンシャル温度の変換係数

$$\bar{T}_{Core}==\frac{4\pi T_{CMB}}{V_C}\exp\left[\frac{1}{2}\frac{\alpha g_0}{C_p}R_{CMB}\right]\int_0^{R_{CMB}}r^2\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\alpha g_0}{C_p}\frac{r^2}{R_{CMB}}\right]dr \tag{62}$$

が得られる。この式と式(71)を用いて変換係数が求められる。

・核の平均温度とポテンシャル温度の変換係数

$$\Theta_{Core}=\frac{V_C}{4\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\alpha g_0}{C_p}R_{CMB}\right]\int_0^{R_{CMB}}r^2\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{\alpha g_0}{C_p}\frac{r^2}{R_{CMB}}\right]dr \tag{63}$$

この積分は解析的に解けないので数値積分により求める。

4.4 核の中の密度と圧力

密度は Adams-Williamson の式

$$\frac{d\rho}{dr}=-\frac{g}{\phi}z=-\frac{g}{\phi}\left(R_{CMB}-r\right) \tag{71}$$

$$g=g_0\frac{r}{R_{CMB}} \tag{72}$$

より求める。ここで，サイスミックパラメータを一定と仮定する。すなわち，

$$\rho_C=\rho_{CMB}\exp\left[\frac{1}{2}\frac{g_0}{\phi}\left(\frac{R_{CMB}^2-r^2}{R_{CMB}}\right)\right] \tag{73}$$

と求められる。これはとてもおおざっぱな仮定である。

・外核の密度

$$\rho_C=\rho_{CMB}\exp\left[\frac{1}{2}\frac{g_0}{\phi}R_{CMB}\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{g_0}{\phi R_{CMB}}r^2\right] \tag{74}$$

外核内部の圧力は

$$dp=-\rho_{CMB}\exp\left[\frac{1}{2}\frac{g_0}{\phi R_{CMB}}\left(R_{CMB}^2-r^2\right)\right]\frac{g_0}{R_{CMB}}rdr \tag{75}$$

$$=-\rho_{CMB}\frac{g_0}{R_{CMB}}r\exp\left[\frac{1}{2}\frac{g_0R_{CMB}}{\phi}\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{g_0}{\phi R_{CMB}}r^2\right]dr \tag{76}$$

を積分して

$$P_C=P_{CMB}+\int_{R_{CMB}}^{r}dP \tag{77}$$

ここで,

$$\int_{R_{CMB}}^{r}dP=-\rho_{CMB}\frac{g_0}{R_{CMB}}\exp\left[\frac{1}{2}\frac{g_0}{\phi}R_{CMB}\right]\int_{R_{CMB}}^{r}r\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{g_0}{\phi R_{CMB}}r^2\right]dr \tag{78}$$

$$= \phi\left(\rho_C - \rho_{CMB}\right) \tag{79}$$

である。

・**外核内部の圧力**

$$P_C = P_{CMB} + \phi\left(\rho_C - \rho_{CMB}\right) \tag{80}$$

4.5 核の融解温度

融解温度は圧力に比例すると仮定する。つまり，

$$T_{mC} = T_{mCMB}\left(1 + \beta \frac{P - P_{CMB}}{P_{CMB}}\right) = T_{mCMB}\left[1 + \beta'\left(P - P_{CMB}\right)\right] \tag{81}$$

である。これもおおざっぱな仮定である。

・**核の融解温度**

$$T_{mC} = T_{mCMB}\left[1 + \beta'\phi\left(\rho_{CMB} \exp\left[\frac{1}{2}\frac{g_0}{\phi} R_{CMB}\right] \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{g_0}{\phi}\frac{r^2}{R_{CMB}}\right] - \rho_{CMB}\right)\right] \tag{82}$$

4.6 外核・内核境界の位置

外核・内核境界の位置は核の温度と融点が等しくなる場所である。すなわち，

$$T_{mC} = T_C \tag{91}$$

となる場所である。

・**外核・内核境界の半径を表す方程式**

$$F(r) = C + E\exp\left[-Dr^2\right] - B\exp\left[-Ar^2\right] = 0 \tag{92}$$

ただし，

$$A = \frac{1}{2}\frac{\alpha g_0}{C_p R_{CMB}} \tag{93}$$

$$B = T_{CMB}\exp\left[\frac{1}{2}\frac{\alpha g_0}{C_p} R_{CMB}\right] \tag{94}$$

$$C = T_{mCMB}\left(1 - \beta'\phi\rho_{CMB}\right) \tag{95}$$

$$D = \frac{1}{2}\frac{g_0}{\phi R_{CMB}} \tag{96}$$

$$E = T_{mCMB}\beta'\phi\rho_{CMB}\exp\left[\frac{1}{2}\frac{g_0}{\phi}R_{CMB}\right] \tag{97}$$

この方程式は非線形方程式であり，解析的に解けないのでニュートン法により求める。すなわち，

$$F'(r) = \frac{dF}{dr} = -2DEr\exp\left[-Dr^2\right] + 2ABr\exp\left[-Ar^2\right] \tag{98}$$

$$r^{n+1} = r^n - \frac{F(r^n)}{F'(r^n)} \tag{99}$$

ここで，n は反復回数である。r^n が収束したら

$$R_{ICB} = r^n \tag{100}$$

を解とする。

4.7 内核形成に伴う発熱

内核形成に伴う発熱は内核の成長率

$$\frac{dM_{IC}}{dt} = 4\pi R_{ICB}\rho_C\frac{dR_{ICB}}{dt} = 4\pi R_{ICB}\rho_C\frac{dR_{ICB}}{dT_{CMB}}\frac{dT_{CMB}}{dt} \tag{101}$$

から求められる (Stevenson et al., 1983)。ここで dR_{ICB}/ dT_{CMB} は核マントル境界の温度に対する内核の成長率である。いま，

$$A = \frac{1}{2}\frac{\alpha g_0}{C_p}\frac{1}{R_{CMB}} \tag{93}$$

$$B' = \exp\left[\frac{1}{2}\frac{\alpha g_0}{C_p}R_{CMB}\right] = \exp\left[AR_{CMB}^2\right] \tag{102}$$

$$C' = 1 - \beta'\phi\rho_{CMB} \tag{103}$$

$$E' = \rho_{CMB}\exp\left[\frac{1}{2}\frac{g_0}{\phi}R_{CMB}\right] = \rho_{CMB}\exp\left[DR_{CMB}^2\right] \tag{96}$$

$$G = \beta'\phi\rho_{CMB}\exp\left[DR_{CMB}^2\right] = \beta'\phi E' \tag{104}$$

と置く。これらの記号を用いると，外核内の温度は，

$$T_C(r) = T_{CMB}B'\exp\left[-Ar^2\right] \tag{105}$$

と表される。一方，外核の融解温度は

$$T_{mC} = T_{mCMB}\left(C' + G\exp\left[-Dr^2\right]\right) \tag{106}$$

と表される。内核・外核境界で両者は等しい。すなわち,

$$T_C\left(R_{ICB}\right) = T_{mC}\left(R_{CMB}\right) \tag{107}$$

である。この式から CMB 温度と内核半径の関係

$$T_{CMB}B'\exp\left[-AR_{ICB}^2\right] = T_{mCMB}\left(C' + G\exp\left[-DR_{ICB}^2\right]\right) \tag{108}$$

$$T_{CMB} = B'^{-1}T_{mCMB}\left(C' + G\exp\left[-DR_{ICB}^2\right]\right)\exp\left[AR_{ICB}^2\right] \tag{109}$$

がわかる。微分すると

$$\frac{dT_{CMB}}{dR_{ICB}} = 2rB'^{-1}T_{mCMB}\left\{AC'\exp\left[AR_{ICB}^2\right] + \left(A-D\right)G\exp\left[\left(A-D\right)R_{ICB}^2\right]\right\} \tag{110}$$

が求められる。この式から

$$\frac{dR_{ICB}}{dT_{CMB}} = \left(\frac{dT_{CMB}}{dR_{ICB}}\right)^{-1} \tag{111}$$

の値を計算できる。また CMB 温度の時間変化率 $dT_{CMB}/\, dt$ は

$$\frac{dT_{CMB}}{dt} = \frac{1}{\Theta_{Core}}\frac{d\bar{T}_{Core}}{dt} \tag{112}$$

である。

・内核形成に伴う発熱

$$H_{IC} = \left(L + E_G\right)\frac{dM_{IC}}{dt} \tag{113}$$

ここで L は潜熱，E_G は重力エネルギーである。どちらも単位質量辺りの量である。これらの量は Stevenson et al. (1983)に従ってパラメータとして与えている。