

日食を理解・探求するための STEM 教材の開発

寺垣内 政一* 北臺 如法† 齋藤 敏夫‡ 山本 亮介§

概要

日食のメカニズムを理解し、探求するための STEM 教材を提案する。この教材の目的は、複数の簡易な数学的モデルを用いた考察を通して日食のメカニズムを理解・探求することであり、高精度で日食を予報することではないが、実際にはモデルを用いて、わずかの誤差で日食を予測できるため、その価値もまた生徒が実感できると期待する。次期学習指導要領で高等学校に新設される科目「理数探求基礎」で使用する探求課題としての利用を提案する。

キーワード：日食現象，教材，STEM 教材，理数探求基礎

1 はじめに

科学・技術・工学・数学の4つの分野に重点を置いた STEM 教育は、次期学習指導要領に向けた中央教育審議会の報告 [10] の中で、算数・数学の教育内容の見直しについて「これからの時代を生き抜くため、米国等では STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics) 教育の推進が図られており、その基盤に数学が位置付けられている」(p.158)，理科の教育内容の見直しについて「現代社会が抱える様々な課題を解決するためにイノベーションが期待されており、世界的にも理数教育の充実や創造性の涵養が重要視されており、米国等における STEM 教育の推進はその一例である。STEM 教育においては、問題解決型の学習やプロジェクト型の学習が重要視されており、我が国における探究的な学習の重視と方向性を同じくするものである」(p.169)と言及されたように、STEM 教育の先進国であるアメリカのみならず、日本でも教育政策の方向性を示す重要なキーワードとなりつつある。

本稿では、誰でも一生のうちに数回は経験するであろう日食現象に対して、そのメカニズムを理解し、

探求するための STEM 教材を提示する。STEM 教育では、生徒が主体的に現実の世界や日常の中から疑問や問題を発見し、必要ならば数理的モデルを通して、その課題に取り組むことが求められる [2, 3, 4]。

日食現象は、日本国内で観測できるときにはメディアも大きく取り上げるため、子供から大人まで関心の高い話題である。日食は新月のときにだけ起こることや皆既日食、金環日食、部分日食¹といったタイプがあることは比較的よく知られているが、地球規模で見れば約 177 日周期でどこかで日食が発生すること、稀に連続した新月（つまり 1 ヶ月の間隔）で日食が起こりうること、最大で 1 年間に 5 回の日食が発生しうることなどは、研究者、理科教員、天文学に関心の高い人などを除いて知られていない。

これらの事実を単に知るだけならば、現在では情報端末での検索によって容易に達成できる。本稿の目的は、簡易な数学的モデルを用いた考察を通して日食現象のメカニズムを理解し、上述の事実の理由を生徒が自らの力で再発見することに加えて、様々な視点を持って主体的に探求するための教材を提示することにある。国立情報学研究所のデータベース CiNii でキーワード「日食，教材」のもと検索しても、観察中心ではなく日食現象のメカニズムに取り組んだ先行研究は数編 [8, 9] しか見つからない。例

* 広島大学大学院教育学研究科。本研究は JSPS 科研費 JP17H00820 の助成を受けたものである。

† 広島大学大学院教育学研究科

‡ 上越教育大学大学院学校教育研究科

§ 群馬大学教育学部

えば [8] は、月の本影の大きさを求める教材を提案しているが、本稿ではより簡易な計算で月の本影の大きさを見積もる。

2017 年度中に改訂，2022 年から年次進行で実施が予定される高等学校の次期学習指導要領では，高等学校に科目「理数探求」「理数探求基礎」が新設される．中央教育審議会の特別チームによる審議の取りまとめ [11] では，実施に必要な体制の整備について，適切な教材の提供，指導事例の共有化が求められている．本稿が提示する教材は，高校数学の範囲内で処理できるものであり，電卓さえあれば十分に堪能できる．本稿では，NASA ジェット推進研究所の SPICE システム [18] を用いて，指定した時刻における地球や月の位置を計算しているが，その作業を生徒に期待しているわけではなく，我々の考察の裏付けとして教員用に提示しているに過ぎない。

2 太陽，地球，月の関係

ケプラーの第 1 法則によれば，地球の公転軌道は太陽を 1 つの焦点とする楕円である．ケプラーはティコ・ブラーエの観測データに基づいてこれを定式化した，のちのニュートン力学によって数学的に楕円軌道であることが証明された ([1])．その離心率はわずか 0.0167 しかないため，本稿で提示するモデルでは地球の公転軌道を円と仮定し²，その半径を SE ($= 149.60 \times 10^6$ km) で表す．地球の公転周期 P_E は 365.256 日だから，地球の角速度は $\omega_E = 360^\circ/P_E$ ($= 0.985610^\circ/\text{day}$) である³．太陽，地球，月の中心をそれぞれ記号 S ， E ， M で表す．

月の公転軌道も地球を焦点の 1 つとする楕円軌道であり，その離心率は 0.0549 である．本稿では，月についても地球を中心とする円軌道を描くと仮定し，その半径を ME ($= 0.3844 \times 10^6$ km) で表す．月の公転周期 P_M は 27.3217 日であり，月の角速度は $\omega_M = 360^\circ/P_M$ ($= 13.1763^\circ/\text{day}$) である．

黄道北極⁴ から見て，地球は太陽の周りを，月は地球の周りを反時計回りに公転している．

日食（及び月食）現象にとって最も重要な因子は，月の公転面（白道面）が地球の公転面（黄道面）に対

して傾斜角 5.145° をもっており，しかもそれが太陽の引力の影響で周期 18.61 年 ($= 6793.477$ 日) で時計回りに回転していることである．もしこの傾斜がなく，白道面と黄道面が一致していれば，新月⁵ のたびに日食が地球上のどこかで観測される．次節では，月の満ち欠け（朔望）の周期と公転周期のずれを理解するために，あえてこの 2 つの公転面が一致するモデルを提示する．実際には白道面が傾斜しているため，新月だからといって日食が起こるわけではなく，月の公転軌道と黄道面の 2 つの交点付近で新月になるときに限って日食が起こる．黄道北極から見て，黄道面の下から上に月が移動するときの交点を昇交点（ascending node）といい，もう 1 つの交点を降交点（descending node）という．本稿では，それぞれを文字 A と D で表す．

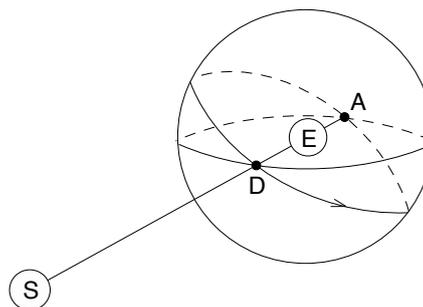


図 1 昇交点と降交点

図 1 では，太陽 S と地球 E を結ぶ直線，昇交点 A と降交点 D を結ぶ線分 AD が平行になるときを示している．このとき，新月が降交点 D の位置にあれば，月の影が地球上に落ちて日食が起こる．実際には，地上から見たときの太陽と月の見かけの大きさ（視直径）の関係で，それら 2 つの交点の前後のある範囲で新月になれば日食が起こる．これは日食条件とよばれる．厳密には太陽と地球，地球と月の距離の変動に影響を受けるが，[16] によれば約 17° 以内であり，日数でいえば，図 1 のようにどちらかの交点が太陽と地球を結ぶ直線上に乗る日時の前後およそ 17 日以内の新月ならば日食が起こる．日食条件については第 6 節で分析する．

3 月の朔望周期と公転周期

月の朔望周期（朔望月）は平均 29.53059 日である。公転周期 27.3217 日との約 2 日のずれは何に起因するのだろうか。月の公転周期は、月が地球の周りを 1 周する時間として定義されている。ある新月のときから数えて、月が地球の周りを 1 周しても、その間に地球がその公転軌道上を 30° ほど進行してしまうため、次の新月の位置に月が到達していない。したがって、約 2 日かけて、次の新月の位置まで月が移動しなければならないのである。

本節では、日食のメカニズム理解の素地として、白道面が黄道面と一致すると仮定した第 1 モデルを提示し、このずれを確認する。白道面を黄道面に正射影したものであるが、白道面の傾斜角がわずか 5.1° しかないため、誤差は大きくない。

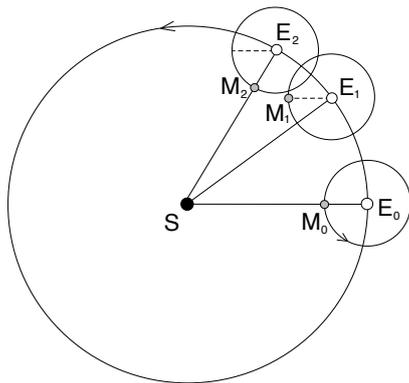


図 2 第 1 モデル

図 2 において、点 S は太陽、点 E_i は地球、点 M_i は月を示す。M₀ は新月に相当し、M₁ は月が公転軌道を 1 周した地点を示している。したがって、月が公転軌道を 1 周した時点では、まだ次の新月を迎えていない。次の新月の位置を M₂ とすれば、最初の新月 M₀ からの経過日数を x として、

$$x \omega_E + 360^\circ = x \omega_M \quad (1)$$

という方程式が得られる。これを解けば、

$$x = \frac{360^\circ}{\omega_M - \omega_E} = \frac{1}{\frac{1}{P_M} - \frac{1}{P_E}} \quad (= 29.5306 \text{ day}) \quad (2)$$

を得る。実際の平均朔望周期 29.53059 日にかなり近い⁶。

さて、地球も月も楕円軌道を描いているため、ケプラーの第 2 法則により、それらの角速度は変化する。その結果、月の朔望周期もまた複雑な変動をしており [12, 15], 29.3~29.8 日の幅がある。のちに日食の周期を考察する際に鍵となるのは 6 朔望周期であり、平均的には 177 日だが、実際には 175~178 日の幅がある。

4 日食の周期

本稿が提示するモデルでは、いくつかの事実は構成因子から外している。地球と月の楕円軌道、地球の自転、自転軸の傾き (23.4°)、太陽と月の視直径の変化、月が地球から遠ざかることなどである。このため、皆既日食と金環日食の違いは説明できないし、地球上のどの地点でどの時間帯に日食が起こるのか予報できない。

第 2 モデルでは、白道面が黄道面に対して傾いていること、そして白道面が 18.61 年の周期で回転していることを考慮に入れる。先に述べたように、昇交点か降交点のいずれかが、太陽と地球を結ぶ直線上に乗る日付近で新月が起こるときしか日食が発生しない。したがって、昇交点と降交点の位置をまず分析しなければならない。昇交点 A と降交点 D を結ぶ線分 AD を考える。地球は線分 AD の中点に位置し、線分 AD は 18.61 年の周期で黄道北極から見て時計回りに回転する。

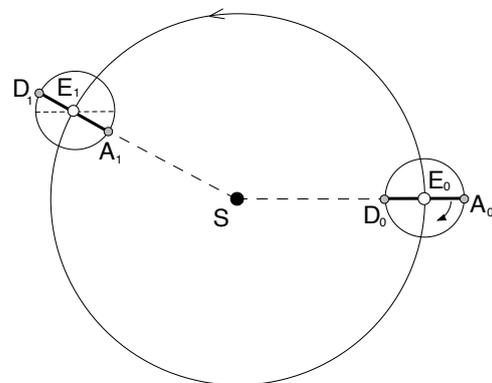


図 3 第 2 モデル

図 3 において、点 E_0 は基準点として選択した地球の位置を示す。次節で基準点の選択について詳細を述べるが、2017 年 2 月 22 日 0 時とする。日食はその 4.62 日後の新月、2 月 26 日に起こっている。点 A_0, D_0 は昇交点と降交点を示す。基準点の 4.62 日後の日食は降交点付近で発生したものである。もし昇交点と降交点を結ぶ線分 AD が回転しなければ、基準点からちょうど半年後に昇交点（付近）で新月になれば日食が起こる。しかし線分 AD は 1 年で 19.34° 、半年で 9.67° 回転する。正確には線分 AD の角速度は

$$\omega_{AD} = \frac{360^\circ}{6793.477} (= 0.05299201^\circ/\text{day}) \quad (3)$$

である。

地球が E_1 の位置に来たとき、昇交点 A_1 と降交点 D_1 を結ぶ線分 A_1D_1 が再び太陽と地球を結ぶ直線と平行になっている。地球が E_1 の地点まで進むのに x 日かかるとすると、

$$180^\circ - x\omega_E = x\omega_{AD} \quad (4)$$

となり、これより

$$x = \frac{180^\circ}{\omega_{AD} + \omega_E} (= 173.310 \text{ day}) \quad (5)$$

となる。

つまり、昇交点と降交点を結ぶ線分が太陽と地球を結ぶ直線と平行になる間隔は 173.31 日であり、この 2 倍である 346.62 日が通常、食年とよばれている。

これまでの考察により、基準点から数えて 173.31 の整数倍となる日の前後 17.90 日（日食条件）の間（食の季節とよぶそうだが、本稿では食区間とよぶ）

$$[173.31m - 17.90, 173.31m + 17.90]$$

に新月が起これば、地球上のどこかで日食が起こる可能性が高い。新月の日は、基準点から数えて $29.53n + 4.62$ 日後である。（実際には、第 3 節で述べたように、新月のタイミングは 1~2 日ずれることがある。）表 2 は、この考察による予報日と実際の日食（表 1）との日数の誤差を示している。例え

日付 (UT)	種類	日食が見える主な地域
2017/2/26	金環 (D)	南米, 南大西洋, アフリカ
2017/8/21	皆既 (A)	北米, 北大西洋
2018/2/15	部分 (D)	南米, 南極
2018/7/13	部分 (A)	南オーストラリア, 南極
2018/8/11	部分 (A)	北極, 北ヨーロッパ
2019/1/6	部分 (D)	北極, 北アジア
2019/7/2	皆既 (A)	南太平洋, 南アメリカ
2019/12/26	金環 (D)	アジア, オーストラリア
2020/6/21	金環 (A)	アフリカ, 南アジア
2020/12/14	皆既 (D)	南太平洋, 南米
2021/6/10	金環 (A)	北極, 北米
2021/12/4	皆既 (D)	南極
2022/4/30	部分 (A)	南極
2022/10/25	部分 (D)	北ヨーロッパ
2023/4/20	金環皆既 (A)	インドネシア
2023/10/14	金環 (D)	北米, メキシコ, ブラジル
2024/4/8	皆既 (A)	メキシコ, 北米
2024/10/2	金環 (D)	太平洋, 南米
2025/3/29	部分 (A)	北極

表 1 最近の日食 [15]

m	食区間	新月	日付 (UT)	誤差
0	[-17.90, 17.90]	4.62	2017/2/26	0
1	[155.41, 191.21]	181.8	2017/8/22	+1
2	[328.72, 364.52]	329.45	2018/1/17	*
		358.98	2018/2/15	0
3	[502.03, 537.83]	506.63	2018/7/13	0
		536.16	2018/8/12	+1
4	[675.34, 711.14]	683.81	2019/1/6	0
5	[848.65, 884.45]	860.99	2019/7/2	0
6	[1021.96, 1057.76]	1038.17	2019/12/27	+1
7	[1195.27, 1231.07]	1215.35	2020/6/21	0
8	[1368.58, 1404.38]	1392.53	2020/12/15	+1
9	[1541.89, 1577.69]	1569.71	2021/6/10	0
10	[1715.2, 1751]	1717.36	2021/11/5	*
		1746.89	2021/12/4	0
11	[1888.51, 1924.31]	1894.54	2022/5/1	+1
		1924.07	2022/5/31	*
12	[2061.82, 2097.62]	2071.72	2022/10/25	0
13	[2235.13, 2270.93]	2248.9	2023/4/20	0
14	[2408.44, 2444.24]	2426.08	2023/10/15	+1
15	[2581.75, 2617.55]	2603.26	2024/4/9	+1
16	[2755.06, 2790.86]	2780.44	2024/10/3	+1
17	[2928.37, 2964.17]	2957.62	2025/3/29	0

表 2 2025 年 3 月までの日食予報と誤差 (日数)。

* は実際には起こらない日食を示す。

ば食区間 [502.03, 537.83] には 2 度の新月が入り、1 ヶ月間隔で日食が連続発生することが予測される。この現象の詳細な分析は第 7 節で述べる。

第 2 モデルを用いた日食予報では、2025 年 3 月 29 日の日食まで、実際に起こることが予報されている日食を 1 つも漏らさず予測できているが、実際には観測されない日食が 3 つ紛れ込んでいる。この余分な日食については、第 6 節で分析する。

5 基準点の選択について

第2モデルに対して、基準点をどの日時に設定するのか。月の軌道上の点である昇交点・降交点の位置を特定するため、月がそれら交点を通過した時刻を利用する。

[18]⁷を用いて、月の黄緯が 0° になる日時（協定世界時 UTC⁸）を計算できる。例えば、2017年1月2日 18:15:03、1月15日 10:46:37、1月29日 22:21:27、2月11日 19:49:43、2月26日 06:29:02といったように、月が昇交点あるいは降交点を通過した日時を得られる。

月が降交点を通過した2017年2月26日 06:29:02において、地球を中心にして春分点方向から測った黄経は、太陽が -22.3858° 、月が -26.8286° であり、線分ADが太陽と地球を結ぶ直線から時計回りに 4.4428° 進んでいたことがわかる。したがって、図3に示した E_0 の位置に地球があった時刻は、

$$\frac{4.4428^\circ}{\omega_{AD} + \omega_E} (= 4.2777 \text{ day}) \quad (6)$$

から、2月26日 06:29:02の4.2777日前の2月21日 23:50:10とわかるため、簡便のため基準点を2月22日 0時とした。

基準点の4.62日後の2月26日 14:59に、月と太陽の黄経が揃った。その時刻の月の黄緯は -0.44° であり、降交点をすでに過ぎて、黄道面より下がっていることが確認できる。次節で述べる日食条件の範囲内であったため、日食が起きている。

6 日食条件

昇交点と降交点を結ぶ線分ADが、地球と太陽を結ぶ直線と平行になるタイミングで新月になれば、日食が起こる。実際には、このタイミングの前後 17° 以内（楕円軌道の影響で、 15.39° から 18.59° の幅で変動する[16]）の新月であれば、部分日食が起こりうるとされる。国立天文台[12]の解説が詳しいが、図4、5を用いて分析する。

ここでは月が降交点に向かっていく状況にある。地球から見た太陽と月の視直径はほぼ同じで、視半径の合計は約 0.5° である。しかし極地から見た月

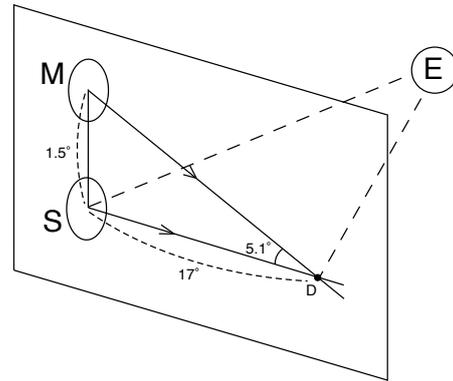


図4 日食条件

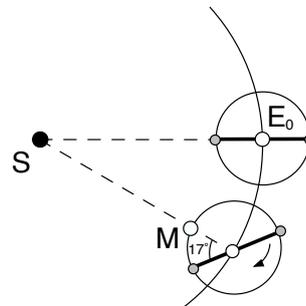


図5 日食条件

の位置は地球中心から見た位置とは約 1° （地球から月までの距離に対する地球の半径の比率は0.017であり、この値の \arctan は 0.97° ）ずれる。そこで月の黄緯を 1.5° とすると、線分ADが太陽と地球を結ぶ直線となす角度は $1.5/\tan 5.1^\circ = 16.81$ から、図4に示したように 17° とできる。この状況下では極地において部分日食が観測される可能性がある。

さて、この位置から x 日後に地球が E_0 の位置にくるとすると、

$$x = \frac{17^\circ}{\omega_{AD} + \omega_E} (= 16.3682 \text{ day}) \quad (7)$$

となる。

同様の計算を最も条件のゆるい 18.59° で行うと、17.8991日となる。こうして、線分ADが太陽と地球を結ぶ直線と平行になる瞬間から前後17.90日以内の新月であれば日食が起こる可能性があるとして、食区間を定義したのである。

我々のモデルでは、地球、月の楕円軌道を考慮し

ていないため、表 2 に示した予報において誤差が生じることは避けられないが、実際には起こらない日食が 3 つ紛れ込んでいた。この点について考察したい。

(1) 2018 年 1 月 17 日に予測された日食は、食区間 [328.72, 364.52] の端に近い 329.45 日後の新月に対応する。[18] を用いて地球からみた太陽と月の位置を計算すると、02:17:58 に太陽と月の黄経が一致する（すなわち、新月が起こる）。このときの月の黄緯は 1.633° であり、日食条件からいえば高すぎるのがわかる。もちろん、日食条件は変動するため、より精密な計算をしなければ日食が起こらないことの断定はできない。

(2) 2021 年 11 月 5 日に予測された日食は、食区間 [1715.2, 1751] の端に近い 1717.36 日後の新月に対応する。実際の新月は基準点から 1716 日後の 2021 年 11 月 4 日 21:15:11 であり、さらに区間の端に近い。新月時の月の黄緯は 1.7266° もある。

(3) 最後に、2022 年 5 月 31 日に予測された日食も食区間の端に近い。実際の新月は 5 月 30 日 11:31:00 に起こり、月の黄緯は 1.49695° である。日食が起こると予報されている 4 月 30 日に比べて 5 月 30 日では、月までの距離が 7200 km ほど遠くなっている。しかし太陽は 1 月 4 日の近日点から 7 月 4 日の遠日点に向けて遠ざかりつつあり、4 月 30 日から 5 月 30 日の間で 95 万 km も遠ざかる。したがって、この間に月の半影は小さくなり、日食条件はより厳しいことが推測できる。

なお、実際には起こらないこれら 3 つの日食に対し、連続する相棒の日食との間に位置する満月においてはいずれも月食が予報されており、次節での考察からいっても、3 つの“幻”の日食は起こるか起こらないかの瀬戸際にあるものだと考えられる。

7 連続する日食

表 1 に示す 2017 年 2 月 26 日の日食は、降交点で起こったものである ([15])。したがってそのあとの日食は昇交点 (A)、降交点 (D) と交互に対応していく。しかし、1 ヶ月間隔で発生する 2 つの日食は例外である。2018 年 7 月 13 日の南極付近で見られ

る部分日食と 1 ヶ月後の 8 月 11 日の北極付近で見られる部分日食は同じ昇交点を挟んで 7 月 13 日、8 月 11 日の新月に対応して発生するものである。つまり、7 月 13 日の新月は昇交点よりも前に位置し、日食条件の限界に近い南極付近で部分日食として見られる。同様に、8 月 11 日の新月は同じ昇交点よりも後に位置し、今度は北極付近での部分日食となる。

2017 年 2 月 22 日を基準点として、 $173.31 \times 3 = 519.93$ より、520 日後は 2018 年 7 月 27 日である。7 月 13 日と 8 月 11 日に新月を迎えるならば、その中間点では満月であり、線分 AD が太陽と地球を結ぶ直線と平行となる 7 月 27 日付近で月食が起こることが予測される (図 6)。実際、2018 年 7 月 27 日に月食が予報されている。

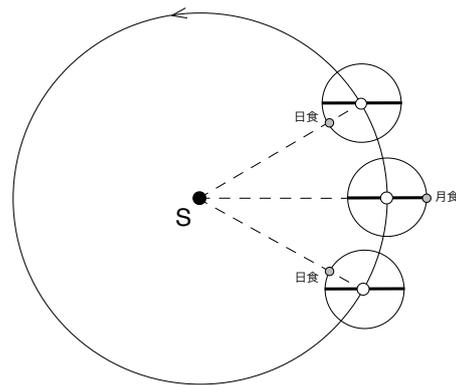


図 6 連続する日食の間に現れる月食

表 3 には 1935 年から 2047 年までの 1 ヶ月間隔で発生した (する) 日食の全てとそのほぼ中間点で発生する月食を示している。これを見る限り例外は 1 つもなく、まるでオーストリアの国旗のように、2 つの日食が月食を挟む姿が浮かび上がる。

8 年間の最大回数

第 2 モデルによる考察から、我々の日食条件のもとで次の命題を証明できる。

命題. 1 年間に (地球上のどこかで) 発生する日食の回数は少なくとも 2 回、多くとも 5 回である。

(証明) 1 年間に少なくとも 2 つの食区間が出現し、

日食	日食	月食
1935/1/5	1935/2/3	1935/1/19
1935/6/30	1935/7/30	1935/7/16
1942/8/12	1942/9/10	1942/8/26
1946/5/30	1946/6/29	1946/6/14
1953/7/11	1953/8/9	1953/7/26
1964/6/10	1964/7/9	1964/6/25
1971/7/22	1971/8/20	1971/8/6
1982/6/21	1982/7/20	1982/7/6
2000/7/1	2000/7/31	2000/7/16
2011/6/1	2011/7/1	2011/6/15
2018/7/13	2018/8/11	2018/7/27
2029/6/12	2029/7/11	2029/6/26
2036/7/23	2036/8/21	2036/8/7
2047/6/23	2047/7/22	2047/7/7

表3 1ヶ月間隔の日食と間の月食 [15]

各食区間において少なくとも一度の新月が起こるため、1年間に少なくとも2回は日食が起こることがわかる。

さて、隣り合う食区間の間隔は137.51日である。これは朔望周期の4倍では足りず、5倍でようやく越すことができる。1年間に6回の日食が起こるためには、連続する3つの食区間に2つずつ新月を配置しなければならない。しかし、朔望周期の13倍は383.89日のため1年間に収まらない。朔望周期を最短の29.3日で計算しても、383.5日となり収まらない。こうして、1年間に日食が6回起こることはない。

なお、我々が採用している日食条件のもとで、1年間に5回の日食が起こるように机上の設定することはできる。しかし日食条件は変動するため、現実には1年間に5回の日食が起こるかどうかは結論できない。実際には年間5回の日食は実現可能であり、直近では1935年に1月5日、2月3日、6月30日、7月30日、12月25日の5回、日食が起こった。[17]によれば、今後は2206年、2709年、2774年などが予測されている。

9 日食の継続時間

日食の継続時間は数秒から数分と短い。皆既日食の場合は最長でも7分31秒、金環日食ならば12分30秒と計算されている。主に地球と月、太陽との距離、月の移動速度、地球の自転速度、観測地点の緯度といった因子によって継続時間は大きく変化する。本節では、簡単な計算に基づいて日食の継続時

間を評価する。

太陽は大きさをもつため、日食時に地球上に落ちる月の影には本影と半影の2種類がある。本影に入ると太陽からの光が全く届かないために皆既あるいは金環日食となり、半影に入ると部分日食となる。

ここでは中心食の継続時間を見積もる。月の本影は地球中心に対して1.022 km/sで西から東へ移動するが、同じ方向に地球が赤道上で0.465 km/sで移動するため、相殺された月の本影の移動速度は赤道上で0.557 km/sとなる。実際には、地球の自転軸の傾きと緯度により、この値は多分に補正されるべきものである。

3つの日食について、実際に計算してみる。

(1) 2016年3月9日の皆既日食は赤道付近を本影が通過しており、皆既帯の幅は155.1 kmであった。

$$\frac{155.1}{0.557 \times 60} = 4.64 \text{ minute} \quad (8)$$

であり、皆既日食の継続時間は4分38秒と見積もることができる。実際には4分9秒であった。

(2) 2017年8月21日の皆既日食は北米を中心に観測され、本影の最大幅は114.7 kmとされる。同様に計算して3分25秒と予測されるが、実際の予測は2分40秒である。北緯36°付近なので、下記のように自転速度を0.375 km/sに補正すると、2分57秒となり、値が近づく。

(3) 2107年10月16日の皆既日食の場合、最大食は赤道付近の緯度1°であり、その地点での本影の移動方向と地球の自転方向が近い。本影の最大幅は113.6 kmであり、自転速度を後述のように補正して計算すれば、継続時間3分24秒と予測され、実際の予測3分16秒との誤差は8秒である。

自転速度の見積もり

地球の自転速度を自力で見積もることも課題として適当である。メートル法の起源が子午線の弧長に基づくことを想起すれば、赤道の円周が約 4×10^4 kmであり、赤道上の自転速度を

$$\frac{4 \times 10^4}{24} = 1666.67 \text{ km/h} = 0.463 \text{ km/s} \quad (9)$$

と算出できる。大阪や広島は北緯34°付近なので、緯線の長さは赤道の長さの $\cos 34^\circ = 0.829$ 倍であ

り、自転速度は

$$0.463 \times 0.829 = 0.384 \text{ km/s} \quad (10)$$

と計算できる.

月の本影の見積もり

次に、月の本影の直径を見積もる. 図7に示すように、太陽 S, 月 M, 地球 E の直径とそれぞれの間の距離を用いて計算する.

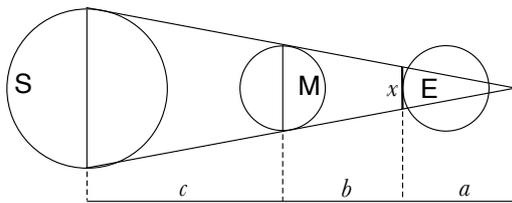


図7 月の本影の幅

2017年8月21日の日食時のデータ [15] では、太陽の直径 $D_S = 139.1 \times 10^4 \text{ km}$, 月の直径 $D_M = 3474 \text{ km}$ であり、地球からの距離はそれぞれ $1.513 \times 10^8 \text{ km}$ と $37.21 \times 10^4 \text{ km}$ である. 地球の半径を 6378 km として計算すると、相似比から

$$x = D_M - \frac{b}{c}(D_S - D_M) = 111.8 \text{ km} \quad (11)$$

と算出される. NASA の予測では 114.7 km であり、簡易な計算ではあるが誤差は小さい. なお、同様の計算で、月の半影の大きさが地球の直径を超えないことも確認できる.

10 日食の翌日

素朴に考えて、なぜ日食の翌日はもはや日食が起こらないのか.

命題. 日食の翌日に日食は起こらない.

(証明) 1日であれば、地球の移動はわずか 1° であるが、月は 13° 移動する.

図8では、月が M_0 の位置にあって日食が起こったと仮定する. 月の影が地球に到達している. なお、月の本影は最大でも 300 km に届かないし、半影も地球の直径には及ばない. 翌日には月がその軌

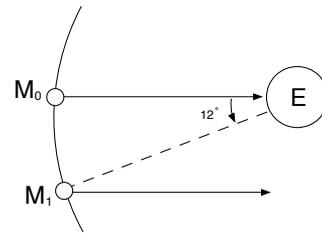


図8 日食の翌日の月

道に沿って M_1 の位置まで 13° 移動する. 地球の移動分 1° を差し引いて、

$$ME \sin 12^\circ = 79921.3 \text{ km} \quad (12)$$

ここで、月までの距離は 384400 km とした. だが、地球の直径は $1.2 \times 10^4 \text{ km}$ にすぎない. こうして、日食の1日後にはもはや月の影は地球に届かないことを確認できる. この考察の系として、次が結論される.

系. 日食の前日は日食ではない.

11 教材として

本稿が提示した日食の様々な視点からの探求は、次期学習指導要領で新設される「理数探求」「理数探求基礎」の探求課題として、高校生が取り組むことが可能なものだと考えている. 第1モデルにそれほど値打ちはないだろうが、第2モデルはこの教材の鍵である. しかし、生徒が自らこのモデルに到達することを期待することには無理があるだろう. したがって、探求の手法について学ぶことが想定されている「理数探求基礎」の教材として提案したい.

参考文献

- [1] R. Abraham and J. E. Marsden, *Foundations of mechanics*, 2nd edition, AMS Chelsea Publ., American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2008.
- [2] R. W. Bybee, *The case for STEM education - Challenges and Opportunities*, NSTA press, 2013.

- [3] N. Z. Chesky and M. R. Wolfmeyer, *Philosophy of STEM education: a critical investigation*, Palgrave Macmillan, 2015.
- [4] Office of Innovation & Improvement, US Department of Education, *STEM2026 – A Vision for Innovation in STEM Education*, 2016.
- [5] 岡村定矩, 池内了, 海部宣男, 佐藤勝彦, 長原裕子編, 人類の住む宇宙 I, 日本評論社, 2007 年.
- [6] 片山真人, 暦の科学, ベレ出版, 2012 年.
- [7] 長沢 工, 日食計算の基礎, 地人書館, 2011 年.
- [8] 林加奈, 愛木豊彦, 「皆既日食を題材とした中学生を対象とする教材の開発と実践」, 岐阜数学教育研究, 第 9 巻, 29–40, 2010 年.
- [9] 松元新一郎, 数学的モデル化過程における「変数の制御」の実態の考察 – 「皆既日食の最大時間の探求」の実践を通して, 教材学研究, 第 16 巻, 19–22, 2005 年.
- [10] 文部科学省中央教育審議会初等中等教育分科会教育課程部会, 次期学習指導要領等に向けたこれまでの審議のまとめについて (報告), 平成 28 年 8 月 26 日.
- [11] 文部科学省中央教育審議会初等中等教育分科会教育課程部会, 高等学校の数学・理科にわたる探求の科目の在り方に関する特別チームにおける審議の取りまとめ (報告), 平成 28 年 8 月 26 日.
- [12] 国立天文台暦計算室, <http://eco.mtk.nao.ac.jp/koyomi/>
- [13] 日食・月食・星食情報データベース, 北海道大学情報基盤センター, <https://almus.iic.hokudai.ac.jp/databases/x10553>
- [14] David R. Williams, *Planetary Fact Sheets*, NASA, <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/planetfact.html>, 2017 年 8 月 10 日閲覧.
- [15] Eclipse Web Site, NASA, <https://eclipse.gsfc.nasa.gov/eclipse.html>
- [16] F. Espenak, EclipseWise.com – Predictions for solar and lunar eclipse, <http://www.eclipsewise.com>

[eclipsewise.com](http://www.eclipsewise.com)

- [17] F. Espenak, A rare solar eclipse, <http://eclipse.star.gs/saros/>
- [18] WebGeocalc – A GUI interface to SPICE, NASA, <http://wgc.jpl.nasa.gov:8080/webgeocalc/>

注

¹ それぞれ英語では, total eclipse, annular eclipse, partial eclipse とよぶ. 前者 2 つを合わせて中心食と称するが, 稀に経路の中心で皆既日食, 両端で金環日食となる hybrid eclipse も起こる. 余談だが, 皆既の意味は全部尽くすことであり, 日本では江戸時代の文献にすでに皆既, 金環という文言が登場する.

² 実際には, 楕円の中心と焦点までの距離は 250 万 km もある.

³ 国際単位系において角速度はラジアン/秒で表すが, 本稿の目的に則して, 度数/日を用いる.

⁴ 黄道面を基準とする黄道座標系での北極を黄道北極といい, りゅう座に位置する. 地球の赤道面を基準とする赤道座標系では, 天の北極は地球の自転軸の北方向にあり, いわゆる北極星の方向にある.

⁵ 新月とは, 太陽と月の黄経が一致する瞬間の月であり, その時刻が特定されるものである.

⁶ 中学入試にこの話題が出題されるらしく, 受験対策として実質的にこの計算が紹介されているウェブサイトが多々あることに驚く.

⁷ 国内のウェブサイトでも計算可能だが, 信頼度が高いので NASA ジェット推進研究所の SPICE システムを利用した. 基準系は ECLIPJ2000 である.

⁸ 厳密には世界時 UT と協定世界時 UTC は異なるが, 誤差はごくわずかである. 日本標準時 JST との差は -9 時間である.