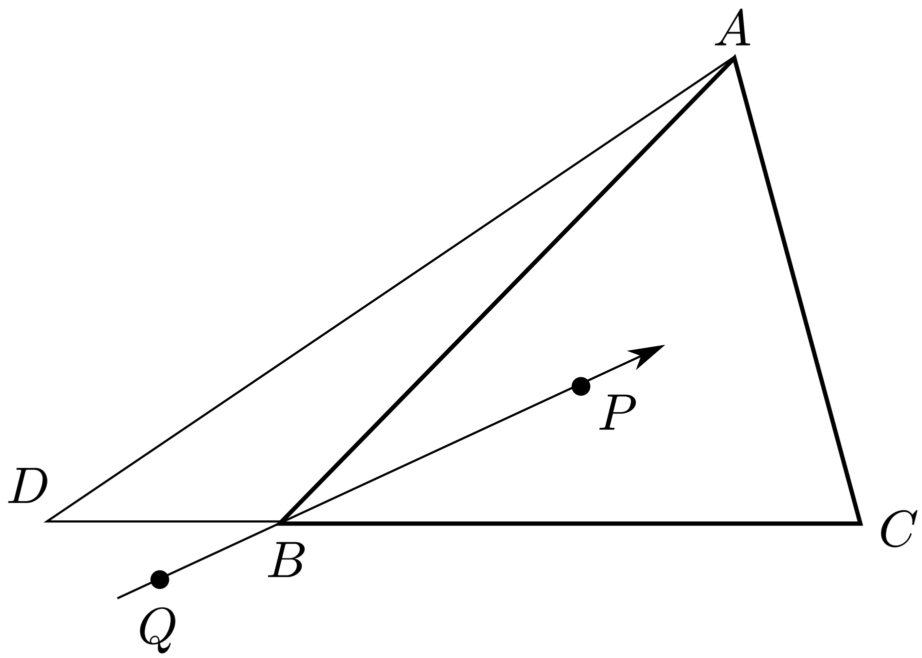
幾何内容の基礎－公理的アプローチ



寺垣内　政一（広島大学大学院教育学研究科）

はじめに

代表的な出世魚である「ぶり」の場合，地方によって名称は異なるそうだが，たとえば

わかな $\to$ はまち $\to$ めじろ $\to$ ぶり

といったように名前が変化する．ポケモンの進化でたとえれば，

ピチュー $\to$ ピカチュウ $\to$ ライチュウ

などは誰でも知っているだろう．（ポケモンの進化は，生物学的には進化に相当しないことは周知のとおりだが．）

この冊子では，まさに「幾何」が新しい公理を取り込んで，どんどん名称が変化していく様を描いている．

結合幾何 $\to$ 計量幾何 $\to$Pasch 幾何 $\to$ 分度器幾何 $\to$ 中立幾何

中立幾何はその先，どのような平行線公理を満たすかに応じて，ユークリッド幾何と非ユークリッド幾何に分化する．再びポケモンでたとえれば，クサイハナがリーフの石か太陽の石に応じて，ラフレシアかキレイハナに進化するようなものである．

非ユークリッド幾何の発見の歴史については，多少耳にしたことがあると思うが，実際に非ユークリッド幾何を学ぶ機会は大学においてもほぼないだろう．近年のトポロジーにおける双曲幾何の重要性を考えれば，大学院レベルでは学ぶべきと思われるが，少なくとも教員を目指す大学生あるいは現職の教員が，非ユークリッド幾何の代表たる双曲幾何を専門的に追及する必要はないだろう．

小学校 1 年生の算数の教科書の早い段階で，「かたち」という言葉が登場する．辞書によれば，「物体が平面や空間を占めているありさま」とある．もちろん，これは数学的表現ではない．2 年生では「三角形」や「四角形」といった「形」を学習する．そもそも「形」とは何だろう．その回答は教科書のどこにもない．ユークリッドは第 1 巻の定義において，「図形」の定義を試みているが，現代数学の厳密な視点に耐えうるものではない．ユークリッド原論の価値にゆらぎなどみじんもないが，その後の人類の努力によって，現代では厳密に幾何学を展開できる．それが公理系から構築する幾何学である．そこにおいては，学校の数学の中ではあいまいなままに放置されている「角」や「三角形」など，厳密に定義される．教員あるいは教員を目指すものが，その内容に熟知する必要はないが，その一端にさえ触れないでいるというのは，ユークリッドの時代からの進化を拒み，先人の努力に見向きもしないという態度の表明に等しい．

本講習の内容は，広島大学教育学部数理系コース 2 年生を対象に 15 回で行う講義内容のダイジェストである．したがって，時間の制約から，数学的な厳密性を犠牲にした部分もある．公理的にアプローチするという枠組み，三角形の合同条件の厳密な扱い，平行線公理に重きを置いた．

2014 年 8 月　寺垣内　政一

目次

1 結合幾何

定義 1.1. 結合幾何（*incidence geometry*） とは，集合 $\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}$ の部分集合からなる集合族 $\mathcal{L}$ からなる組 $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ であって，次の 3 つの条件を満たすものである．ここで，$\mathcal{P}$ の要素は**点（*point*）**とよばれ，$\mathcal{L}$ の要素は**直線（*line*）**とよばれる．集合 $\mathcal{P}$ そのものを**平面（*plane*）**とよぶ．

(I1) 任意の異なる 2 点 P，$Q \in \mathcal{P}$ に対して，$P \in l$ かつ $Q \in l$ となる $l \in \mathcal{L}$ がただ一つ存在する．
(I2) 任意の直線は，少なくとも 2 点を含む．
(I3) 一つの直線上にのらない 3 点が存在する．

以降，結合幾何 $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ において，$P, Q \in \mathcal{P}$ $(P \neq Q)$ を通る唯一の直線を $\overleftrightarrow{PQ}$ で表す．

定義 1.2. 集合 $A \subset \mathcal{P}$ について，$A \subset l$ となる $l \in \mathcal{L}$ が存在するとき，A の要素は**共線的（*collinear*）**であるという．

例 1.1. $\mathcal{P} = \{A, B, C\}$，$\mathcal{L} = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, A\}\}$ とすると，組 $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ は結合幾何である．

例 1.2. $\mathbb{R}^2$ において，実数 a, b, m に対し，

$$L_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = a\}$$
$$L_{m,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx + b\}$$

とする．$\mathcal{L}_E = \{L_a \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{L_{m,b} \mid m, b \in \mathbb{R}\}$ とおくと，組 $\mathcal{E} = (\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_E)$ は結合幾何である．このモデルを**ユークリッド平面（*Euclidean plane*）**とよぶ．

例 1.3. $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ とする．実数 a, c 及び r (> 0) に対して，

$$L_a = \{(x, y) \in \mathbb{H} \mid x = a\}$$
$$L_{c,r} = \{(x, y) \in \mathbb{H} \mid (x - c)^2 + y^2 = r^2\}$$

とする．$\mathcal{L}_H = \{L_a \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{L_{c,r} \mid c, r \in \mathbb{R}, r > 0\}$ とおくと，組 $\mathcal{H} = (\mathbb{H}, \mathcal{L}_H)$ は結合幾何である．このモデルを**双曲平面（*hyperbolic plane*）**とよぶ．

例 1.4. S^2 を $\mathbb{R}^3$ 内の単位球面とする．すなわち，

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

S^2 上の大円とは，原点を通る平面と S^2 との交わりである．$\mathcal{L}_S$ を S^2 上の大円全体の集合とすると，組 $(S^2, \mathcal{L}_S)$ は結合幾何にはならない．（なぜか？）

定理 1.1. 結合幾何 $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ における直線 l_1, l_2 に対し，$|l_1 \cap l_2| \geq 2$ ならば $l_1 = l_2$ である．

証明. $P, Q \in l_1 \cap l_2$ $(P \neq Q)$ とする．結合幾何の条件 (I1) により，P と Q の両方を通る直線はただ 1 つしか存在しない． □

問題 1.1. 結合幾何に対して，以下を証明せよ．

(1) 任意の点 P に対して，P と異なる点が存在する．

(2) 任意の直線 l に対して，l 上にない点 P が存在する．
(3) 任意の点 P に対して，P を通る直線が少なくとも 2 つは存在する．
(4) 任意の直線 l に対して，l と交わる直線が少なくとも 2 つは存在する．
(5) 任意の点 P に対して，P を通らない直線が存在する．

2 計量幾何

Birkhoff の公理系では，実数はすでに集合論的に構築されているということを利用する．この点において，公理系としては要求が強すぎるという立場をとるものもある．しかし，Hilbert の公理系のような立場をとると，準備段階に手間をとられすぎるということもあり，我々は Birkhoff の立場を支持する．現在のアメリカの幾何教育は，1960 年代の SMSG（School Mathematics Study Group）による公理系にしたがっており，それは Birkhoff の公理系の影響を強く受けている．

定義 2.1. 集合 $\mathcal{P}$ 上の**距離関数（*distance function*）**とは，関数 $d : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ であって，任意の $P, Q \in \mathcal{P}$ に対して，

- $d(P,Q) \geq 0$
- $d(P,Q) = 0 \Longleftrightarrow P = Q$
- $d(P,Q) = d(Q,P)$

を満たすものである．

通常，距離空間の理論において，距離関数には三角不等式を課すのだが，この時点では必要ない．

例 2.1. $\mathbb{R}^2$ に対して，関数 $d_E : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$d_E(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

（ここで，$P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2)$）として定義すると距離関数になる．これは**ユークリッド距離（*Euclidean distance*）**とよばれる．

例 2.2. $\mathbb{H}$ に対して，関数 $d_H : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$ を

$$d_H(P,Q) = \begin{cases} \left|\log\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)\right| & (x_1 = x_2 \text{ のとき}) \\ \left|\log\left(\dfrac{\dfrac{x_1 - c + r}{y_1}}{\dfrac{x_2 - c + r}{y_2}}\right)\right| & (P, Q \in L_{c,r} \text{ のとき}) \end{cases}$$

（ここで，$P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2)$）として定義すると距離関数になる．これは**双曲距離（*hyperbolic distance*）**とよばれる．（$d_H(P,Q) = 0$ ならば $P = Q$ であることの確認が少し面倒である．）

定義 2.2. 結合幾何 $(\mathcal{P},\mathcal{L})$ 及び $\mathcal{P}$ 上の距離関数 d を考える．直線 $l\in\mathcal{L}$ に対して，関数 $f:l\to\mathbb{R}$ が l の**目盛関数（*ruler*）**であるとは，2 つの条件

- f は全単射
- 任意の $P,Q\in l$ に対して，$d(P,Q)=|f(P)-f(Q)|$

を満たすときをいう．

定義 2.3. 結合幾何 $(\mathcal{P},\mathcal{L})$ に対して，すべての直線が目盛関数をもつような距離関数 $d:\mathcal{P}\times\mathcal{P}\to\mathbb{R}$ が指定されたとき，三つ組 $(\mathcal{P},\mathcal{L},d)$ を**計量幾何（*metric geometry*）**という．

直線に対する目盛関数は，決して一意ではない．

例 2.3. $(\mathbb{R}^2,\mathcal{L}_E,d_E)$ は計量幾何である．以降，ユークリッド平面 $\mathcal{E}$ とはこの幾何を意味する．

例 2.4. $(\mathbb{H},\mathcal{L}_H,d_H)$ は計量幾何である．以降，双曲平面 $\mathcal{H}$ とはこの幾何を意味する．

上の 2 つの幾何に対して，標準的な目盛関数は次のとおりである（表 1）．

計量幾何	直線	目盛関数
ユークリッド平面	L_a	$f(a,y)=y$
	$L_{m,b}$	$f(x,y)=x\sqrt{1+m^2}$
双曲平面	L_a	$f(a,y)=\log y$
	$L_{c,r}$	$f(x,y)=\log\frac{x-c+r}{y}$

表 1　標準的な目盛関数

次の 3 つの定理はいずれも容易に証明される．

定理 2.1 (Ruler Sliding Lemma: RSL)**.** 直線 l 及び目盛関数 $f:l\to\mathbb{R}$ に対して，実数 c を用いて，関数 $g:l\to\mathbb{R}$ を

$$g(P)=f(P)+c$$

として定めれば，g も直線 l の目盛関数である．

定理 2.2 (Ruler Flipping Lemma: RFL)**.** 直線 l 及び目盛関数 $f:l\to\mathbb{R}$ に対して，関数 $g:l\to\mathbb{R}$ を

$$g(P)=-f(P)$$

として定めれば，g も直線 l の目盛関数である．

定理 2.3 (Ruler Placement Theorem: RPT)**.** 直線 $l=\overleftrightarrow{AB}$ に対して，目盛関数 $f:l\to\mathbb{R}$ で

$$f(A)=0,\quad f(B)>0$$

を満たすものが存在する．

証明. 計量幾何なので，直線 l は目盛関数 $f:l\to\mathbb{R}$ をもつ．$f(A)=a$ とおく．RSL より，$g:l\to\mathbb{R}$ を $g(P)=f(P)-a$ で定義すれば，g は l の目盛関数である．このとき，$g(A)=f(A)-a=0$.

もし $g(B)>0$ ならば，g が求める目盛関数である．もし $g(B)<0$ ならば，$h:l\to\mathbb{R}$ を $h(P)=-g(P)$ で定義すれば，RFL より h もまた l の目盛関数であり，$h(A)=0$ かつ $h(B)>0$ を満たす． □

3　間にあるとは

1 つの点がほかの 2 点の「間にある」という単純な概念が，非常に重要な役割をはたす．Hilbert の公理系では，この概念が無定義語とされるが，Birkhoff の公理系では，目盛関数を使って，実数全体の集合の通常の大小関係に帰着することで容易に定義される．

なお，実数全体の集合は構築されているが，「数直線」という概念は知らないということに留意する必要がある．

定義 3.1. 計量幾何 $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, d)$ において，共線的な 3 つの異なる点 A, B, C を考える．

$$d(A,B) + d(B,C) = d(A,C)$$

が成立するとき，点 B は点 A と点 C の**間にある**という．このとき，$A - B - C$ と表す．

以降，記述を簡単にするため，$d(A,B)$ を AB で表す．

定理 3.1. 直線 l に対する目盛関数 $f : l \to \mathbb{R}$ を考える．l 上の異なる 3 点 A，B，C に対して，

$$A - B - C \iff f(A) < f(B) < f(C) \quad or \quad f(A) > f(B) > f(C).$$

証明. まず，$A - B - C$ と仮定する．$AB + BC = AC$ だから，

$$|f(A) - f(B)| + |f(B) - f(C)| = |f(A) - f(C)| \tag{3.1}$$

である．3 つの実数 $f(A)$，$f(B)$，$f(C)$ の大小関係については 6 通りの可能性がある．

(1) $f(A) < f(B) < f(C)$
(2) $f(A) < f(C) < f(B)$
(3) $f(B) < f(A) < f(C)$
(4) $f(B) < f(C) < f(A)$
(5) $f(C) < f(A) < f(B)$
(6) $f(C) < f(B) < f(A)$

(1) と (6) ならばよい．たとえば (2) を考える．等式 (3.1) は，

$$(f(B) - f(A)) + (f(B) - f(C)) = f(C) - f(A)$$

となり，$2f(B) = 2f(C)$．よって $f(B) = f(C)$ となり矛盾．(3)，(4)，(5) も同様に矛盾する．

逆に，$f(A) < f(B) < f(C)$ と仮定する．

$$AB + BC = |f(A) - f(B)| + |f(B) - f(C)| = (f(B) - f(A)) + (f(C) - f(B)) = f(C) - f(A) = AC$$

となり，$A - B - C$ である．$f(A) > f(B) > f(C)$ の場合も同様．　□

定理 3.2. 計量幾何において，異なる 2 点 A, B に対し，以下が成立する．

(1) $A - B - C$ となる点 C が存在する．
(2) $A - D - B$ となる点 D が存在する．

証明. 直線 $l = \overleftrightarrow{AB}$ の目盛関数 $f : l \to \mathbb{R}$ を考える．$x = f(A)$，$y = f(B)$ とおく．$x < y$ として十分．

(1) $C = f^{-1}(y + 1)$ とおけば，

$$AB + BC = (y - x) + 1 = AC$$

だから，$A-B-C$ である．

(2) $D=f^{-1}(\frac{x+y}{2})$ とおけば，$A-D-B$ である． □

4　線分と半直線

算数の教科書では，線分という用語は登場せず，直線と線分の区別はあいまいにされている．ユークリッド原論において，直線は最初から無限に伸びているものとしていないことと奇しくも対応する．

4.1　線分

定義 4.1. 計量幾何 $(\mathcal{P},\mathcal{L},d)$ において，異なる 2 点 A,B に対し，

$$\overline{AB}=\{A,B\}\cup\{C\in\mathcal{P}\mid A-C-B\}$$

を，A と B を結ぶ**線分（*segment*）**という．

この定義により，$\overline{AB}\subset\overleftrightarrow{AB}$ となる．

定義 4.2. 線分 $\overline{AB}$ の**端点（*end point*）**とは，点 A 及び B とする．線分 $\overline{AB}$ の**長さ（*length*）**とは，AB $(=d(A,B))$ とする．

実際には，端点が線分に対して，一意に定まることを証明する必要がある．それは目盛関数を用いればよい．

定義 4.3. 2 つの線分 $\overline{AB},\overline{CD}$ が**合同（*congruent*）**であるとは，長さが等しいときをいう．このとき，$\overline{AB}\simeq\overline{CD}$ と表す．

4.2　半直線

定義 4.4. 計量幾何 $(\mathcal{P},\mathcal{L},d)$ において，異なる 2 点 A,B に対し，

$$\overrightarrow{AB}=\overline{AB}\cup\{C\in\mathcal{P}\mid A-B-C\}$$

を，A から B への**半直線（*ray*）**という．

こうして，$\overline{AB}\subset\overrightarrow{AB}\subset\overleftrightarrow{AB}$ である．

定理 4.1. $C\in\overrightarrow{AB}$ かつ $C\neq A$ ならば，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}$.

証明. RPT から，$\overleftrightarrow{AB}$ の目盛関数 f で，$f(A)=0,f(B)>0$ となるものを選べる．このとき，$\overrightarrow{AB}=f^{-1}(\{r\mid r\geq 0\})$ である．よって，$f(C)>0$ であり，$\overrightarrow{AC}=f^{-1}(\{r\mid r\geq 0\})$. □

定義 4.5. 半直線 $\overrightarrow{AB}$ の**始点（*initial point*）**とは，点 A とする．

厳密には，始点が半直線に対して一意に定まることを確認する必要がある．

4.3 Segment Construction

定理 4.2 (Segment Construction Theorem)**.** 半直線 $\overrightarrow{AB}$ 及び線分 $\overline{PQ}$ が与えられたとき, 半直線 $\overrightarrow{AB}$ 上に, $\overline{AC} \simeq \overline{PQ}$ となる点 C がただ 1 つ存在する.

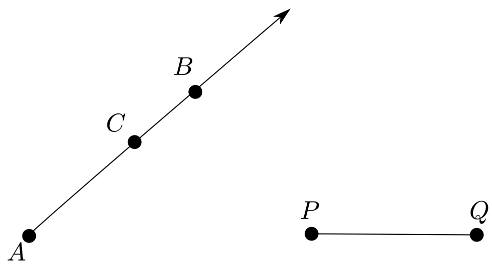


図 1

証明. RPT より，直線 $l = \overleftrightarrow{AB}$ の目盛関数 $f : l \to \mathbb{R}$ を $f(A) = 0, f(B) > 0$ に選べる．$r = PQ > 0$ とおく．$C = f^{-1}(r)$ とすると，$C \in \overrightarrow{AB}$．そして，$AC = |f(A) - f(C)| = |0 - r| = r = PQ$.

もし，$C' \in \overrightarrow{AB}$ かつ $AC' = PQ$ とすると，$f(C') = f(C') - f(A) = AC' = PQ = f(C)$ だから，f の単射性より $C = C'$ となる． □

5 角と三角形

定義 5.1. A, B, C を共線的でない 3 点とする．角 $\angle ABC$ とは,

$$\angle ABC = \overrightarrow{BA} \cup \overrightarrow{BC}$$

として定義される $\mathcal{P}$ の部分集合である.

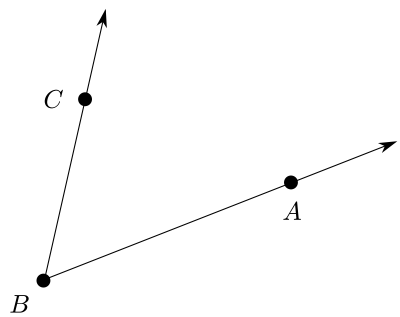


図 2

角とは，1 点のみを共有する 2 つの半直線の和集合であるという認識が重要である.

定義 5.2. 角 $\angle ABC$ の**頂点（*vertex*）**とは，点 B とする.

ここでも，厳密には，頂点が角に対して一意に定まることを確認する必要がある．

定義 5.3. 共線的でない 3 点 A, B, C に対して，**三角形（*triangle*）**ABC とは，集合

$$\triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$$

とする．また，$\angle CAB$，$\angle ABC$，$\angle BCA$ を $\triangle ABC$ の**角（*angle*）**といい，それぞれ $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ と表すこともある．

ここでも，三角形とは 3 つの線分の和集合であることを認識しておいてほしい．

定理 5.1. A, B, C が共線的でないならば，

$$\triangle ABC = \triangle BCA = \triangle CAB = \triangle ACB = \triangle BAC = \triangle CBA.$$

証明. 三角形の定義と線分の性質から従う． □

定義 5.4. $\triangle ABC$ の**頂点（*vertex*）**とは，点 A, B, C をいう．$\triangle ABC$ の**辺（*side*）**とは，線分 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ をいう．

くどいようだが，三角形の頂点が一意的に定まることは自明ではない．

6 平面分割公理

平面分割公理とは，直線は平面を 2 つに分割することを要請するものである．つまり，直線に対してはその「両側」が存在することを要求するのである．

部分集合 $H \subset \mathcal{P}$ が凸集合であるとは，任意の異なる 2 点 $P, Q \in H$ に対して，$\overline{PQ} \subset H$ を満たすことであった．

定義 6.1. 計量幾何 $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, d)$ が**平面分割公理（*Plane Separation Axiom*: *PSA*）**を満たすとは，任意の直線 $l \in \mathcal{L}$ に対して，以下を満たす部分集合 $H_1, H_2 \subset \mathcal{P}$ が存在するときをいう．

- $\mathcal{P} - l = H_1 \cup H_2$
- $H_1 \cap H_2 = \varnothing$
- H_1 及び H_2 は凸集合
- $A \in H_1$，$B \in H_2$ ならば，$\overline{AB} \cap l \neq \varnothing$.

また，そのような H_1, H_2 を，直線 l の定める**半平面（*half plane*）**とよぶ．

以下，PSA を満たす計量幾何 $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, d)$ を考える．

定義 6.2. 直線 l 及びそれが定める半平面 H_1, H_2 に対して，点 $A, B \in H_i$ のとき，2 点 A, B は l の**同じ側にある**という．一方が H_1 に属し，他方が H_2 に属するときは，l の**異なる側にある**という．また，$A \in H_i$ ならば，H_i を，A を**含む側**とよぶ．

次の定理は簡単だが，今後，何度も利用され，非常に有用である．

定理 6.1. 直線 l に対して，$A, B \notin l$ $(A \neq B)$ とする．

(1) A と B が l の異なる側にある $\Longleftrightarrow$ $\overline{AB} \cap l \neq \varnothing$.

(2) A と B が l の同じ側にある $\Longleftrightarrow \overline{AB} \cap l = \varnothing$.

証明. 2 つの命題は対偶の関係にあるので，同時に証明できる．A と B が l の異なる側にあるならば，$A \in H_1$，$B \in H_2$ として十分．PSA の条件により，$\overline{AB} \cap l \neq \varnothing$．$A$ と B が l の同じ側にあるならば，$A, B \in H_1$ として十分．H_1 は凸だから，$\overline{AB} \subset H_1$．こうして，$\overline{AB} \cap l \neq \varnothing$. □

問題 6.1. 直線 l が半平面 H_1, H_2 を定めるとき，$H_i \neq \varnothing$ $(i = 1, 2)$ を示せ.

問題 6.2. 直線 l が半平面 H を定めるとき，H は少なくとも 3 つの共線的でない点を含むことを示せ.

問題 6.3. 直線，半直線，線分は凸集合であることを示せ.

問題 6.4. 直線 l とそれの定める半平面 H に対して，$H \cup l$ は凸集合であることを示せ.

7 Pasch 幾何

Moritz Pasch（1843–1930）は，1882 年に初めて幾何学の公理系を与えたドイツの数学者である.

定義 7.1. 計量幾何 $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, d)$ が次の条件を満たすとき，***Pasch* 幾何（*Pasch geometry*）**とよばれる：直線 l，$\triangle ABC$ に対して，$A - D - B$ となる点 $D \in l$ が存在するならば，$l \cap \overline{AC} \neq \varnothing$ か $l \cap \overline{BC} \neq \varnothing$ である.

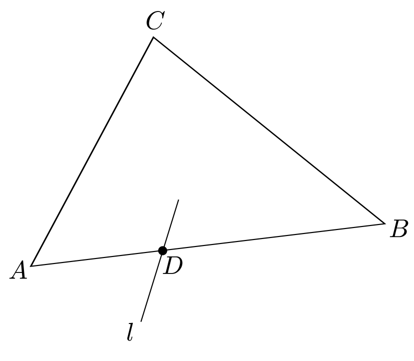


図 3

定理 7.1 (Pasch's Theorem)**.** 計量幾何が PSA を満たすならば，*Pasch* 幾何である.

証明. 直線 l，$\triangle ABC$ に対して，$A - D - B$ となる点 $D \in l$ が存在するとしよう．$A \in l$ あるいは $B \in l$ ならば，$l = \overleftrightarrow{AB}$ であり，結論を得る．$A, B \notin l$ とすると，A と B は l の異なる側にある.

ここで，$l \cap \overline{AC} = \varnothing$ と仮定する．すると，A と C は l の同じ側にあるから，B と C は l の異なる側にある．よって，$l \cap \overline{BC} \neq \varnothing$ が成立する. □

実は，Pasch's Theorem の逆も成立するが，証明はかなり面倒である.

定理 7.2. *Pasch* 幾何は PSA を満たす.

8　内部と Crossbar Theorem

このセクションの目的は，半直線，線分，角，三角形に対して，それらの内部という概念を定義し，クロスバー定理（Crossbar Theorem）とよばれる有用な定理を示すことである．

以降，Pasch 幾何を考える．

8.1　内部

定義 8.1. 半直線 $\overrightarrow{AB}$ の**内部（*interior*）**とは，

$$\mathrm{Int}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} - \{A\}.$$

線分 $\overline{AB}$ の**内部**とは，

$$\mathrm{Int}(\overline{AB}) = \overline{AB} - \{A, B\}$$

とする．

補題 8.1 (Y Theorem)**.** 直線 l とそれの定める半平面 H に対して，$A \in l$ かつ $B \in H$ ならば，$\mathrm{Int}(\overrightarrow{AB}) \subset H$.

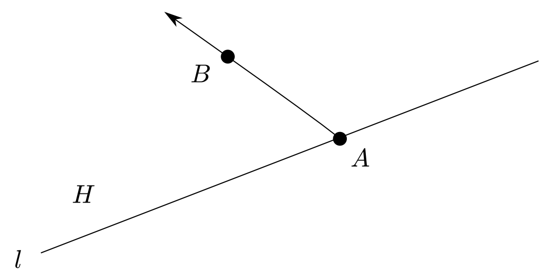


図 4

証明. $H \cup l$ は凸だから，$\overline{AB} \subset H \cup l$ はよい．線分 $\overline{AB}$ 上の点のうち，A 以外に l に入る点があれば，$\overline{AB} \subset l$ となり，$B \in l$ となってしまうので，A 以外の点は H に入る．

$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{C \mid A - B - C\}$ だから，あとは，$A - B - C$ となる点 C について，$C \in H$ をいえばよい．

$\mathcal{P} - l = H \cup H'$ とする．$C \in l$ ならば，$A \in l$ とあわせて，$\overleftrightarrow{AC} = l$ となり，$B \in l$ で矛盾．$C \in H'$ ならば，$B \in H$ ゆえ，PSA から $\overline{BC} \cap l \neq \varnothing$．つまり，線分 $\overline{BC}$ 上に l の点（それは A と異なる）が存在することになり，$A \in l$ とあわせて，上と同様に矛盾する． □

次の Z Theorem も証明はやさしいが，Crossbar Theorem の証明に必要である．

定理 8.1 (Z Theorem)**.** 直線 l とそれ上の異なる 2 点 A, C に対して，点 B, D が l の異なる側にあるならば，$\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CD} = \varnothing$.（図 5 参照.）

証明. $\mathcal{P} - l = H \cup H'$ とする．$B \in H$，$D \in H'$ として十分．Y Theorem（補題 8.1）により，$\mathrm{Int}(\overrightarrow{AB}) \subset H$,

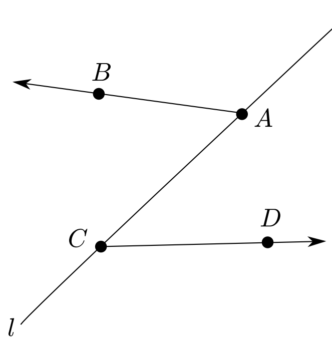


図 5

$\mathrm{Int}(\overrightarrow{CD}) \subset H'$．こうして，$\mathrm{Int}(\overrightarrow{AB}) \cap \mathrm{Int}(\overrightarrow{CD}) = \varnothing$．よって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CD} &= (\{A\} \cup \mathrm{Int}(\overrightarrow{AB})) \cap (\{C\} \cup \mathrm{Int}(\overrightarrow{CD})) \\ &= (\{A\} \cap \mathrm{Int}(\overrightarrow{CD})) \cup (\{C\} \cap \mathrm{Int}(\overrightarrow{AB})) \\ &= \varnothing.\end{aligned}$$

□

定義 8.2. 角 $\angle ABC$ の**内部** $\mathrm{Int}(\angle ABC)$ とは，直線 $\overleftrightarrow{AB}$ の C を含む側（半平面）と直線 $\overleftrightarrow{BC}$ の A を含む側（半平面）の共通部分とする．（図 6 参照.）

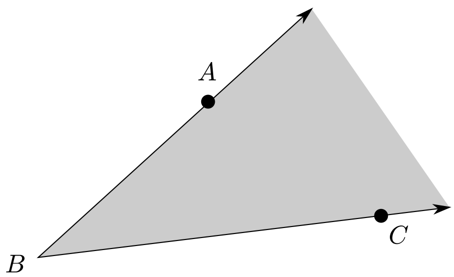


図 6

8.2　クロスバー定理

定理 8.2 (Crossbar Theorem)**.** $P \in \mathrm{Int}(\angle ABC)$ ならば，$\overrightarrow{BP} \cap \overline{AC} = \{F\}$ であり，$A - F - C$.

証明. Pasch の定理を利用するために，$D - B - C$ となる点 D を選び，$\triangle DCA$ をつくる．まず，$\overleftrightarrow{BP} \cap \overline{AD} = \varnothing$ を示す．

$P \in \mathrm{Int}(\angle ABC)$ だから，直線 $\overleftrightarrow{AB}$ に対して，P と C は同じ側にある．しかし $\overleftrightarrow{AB}$ に対して，C と D は異なる側にあるから，P と D も異なる側にある．Z Theorem により，$\overrightarrow{AD} \cap \overrightarrow{BP} = \varnothing$．特に，$\overline{AD} \cap \overrightarrow{BP} = \varnothing$.

$P - B - Q$ なる点 Q を選ぶ．$\overleftrightarrow{BC}$ に対して，P と A は同じ側にあり，P と Q は異なる側にあるから，A と Q は異なる側にある．再び Z Theorem により，$\overrightarrow{DA} \cap \overrightarrow{BQ} = \varnothing$．特に，$\overline{AD} \cap \overrightarrow{BQ} = \varnothing$.

$\overleftrightarrow{BP} = \overrightarrow{BP} \cup \overrightarrow{BQ}$ なので，$\overleftrightarrow{BP} \cap \overline{AD} = \varnothing$ を得る．Pasch の定理から，$\overleftrightarrow{BP} \cap \overline{AC} \neq \varnothing$．3 点 A, B, C は共線的でないから，$\overleftrightarrow{BP} \cap \overline{AC}$ はただ 1 点からなる．それを F としよう．

もし $F = A$ ならば，$\overleftrightarrow{BP} \cap \overline{AD} = \varnothing$ に反する．もし $F = C$ ならば，同じく $\overleftrightarrow{BP} \cap \overline{AD} = \varnothing$ に反する．以上から，$F \in \mathrm{Int}(\overline{AC})$．

最後に，$F \in \mathrm{Int}(\overline{AC})$ から，A と F は直線 $\overleftrightarrow{BC}$ の同じ側にある．P と A も同じ側にあるから，P と F も同じ側にある．こうして，$F \in \overrightarrow{BP}$. □

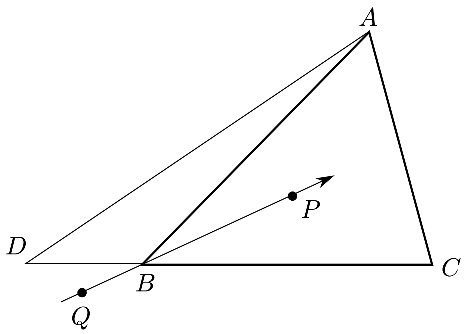


図 7

定理 8.3 (Crossbar の逆)**.** $\angle ABC$ に対して，$\overrightarrow{BP} \cap \mathrm{Int}(\overline{AC}) \neq \varnothing$ ならば，$P \in \mathrm{Int}(\angle ABC)$.

証明. $\overrightarrow{BP} \cap \mathrm{Int}(\overline{AC}) = \{Q\}$ とする．($P = Q$ かもしれない.) 直線 $\overleftrightarrow{BC}$ の定める半平面 H 内に A があるとする．$\mathrm{Int}(\overrightarrow{CQ}) = \mathrm{Int}(\overrightarrow{CA}) \subset H$ ゆえ，$\overline{AQ} \cap \overleftrightarrow{BC} = \varnothing$ である．こうして，A と Q は直線 $\overleftrightarrow{BC}$ の同じ側にある．

また，$\mathrm{Int}(\overrightarrow{BP}) = \mathrm{Int}(\overrightarrow{BQ}) \subset H$ だから，$\overline{QP} \cap \overleftrightarrow{BC} = \varnothing$．よって，$P$ と Q は直線 $\overleftrightarrow{BC}$ の同じ側にある．以上から，A と P は直線 $\overleftrightarrow{BC}$ の同じ側にある．

同様に議論して，C と P は直線 $\overleftrightarrow{AB}$ の同じ側にあることがわかり，$P \in \mathrm{Int}(\angle ABC)$. □

9 角度

定義 9.1. *Pasch* 幾何 $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, d)$ に対して，すべての角のなす集合族を $\mathcal{A}$ とする．**分度器関数（*protractor*）**とは，次の条件を満たす関数 $m : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ である：

(1) $\angle ABC \in \mathcal{A}$ ならば $0 < m(\angle ABC) < 180$.

(2) 半平面 H の端に含まれる半直線 $\overrightarrow{BC}$ が与えられたとき，任意の実数 $\theta \in (0, 180)$ に対して，$A \in H$ で $m(\angle ABC) = \theta$ となるような半直線 $\overrightarrow{BA}$ がただ 1 つ存在する．

(3) $D \in \mathrm{Int}(\angle ABC)$ ならば，
$$m(\angle ABD) + m(\angle DBC) = m(\angle ABC).$$

条件 (2) を **Angle Construction Axiom**，条件 (3) を **Angle Addition Axiom** という．角 $\angle ABC$ に対して，値 $m(\angle ABC)$ をその**角の大きさ（角度）**とよぶ．もちろん，それは分度器関数 m に依存している．なお，定義に登場する 180 という実数には本質的に意味はない．正の実数ならば，どんな値でもよい．

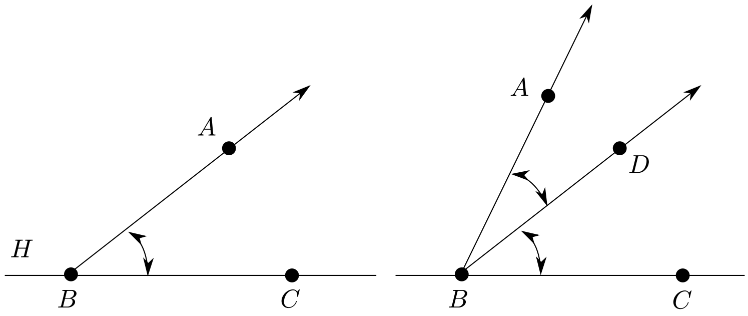


図 8

定義 9.2. *Pasch* 幾何 $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, d)$ に対して，分度器関数 m を 1 つ指定したとき，組 $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, d, m)$ を**分度器幾何（*protractor geometry*）**という．

定義 9.3. 2 つの角 $\angle ABC$，$\angle DEF$ が**合同（*congruent*）**であるとは，$m(\angle ABC) = m(\angle DEF)$ のときをいう．このとき，$\angle ABC \simeq \angle DEF$ と表す．

10　垂直と角の合同

定義 10.1. $m(\angle ABC)$ の値が 90 未満，90，90 以上かに応じて，角 $\angle ABC$ を**鋭角（*acute angle*）**，**直角（*right angle*）**，**鈍角（*obtuse angle*）**という．

定義 10.2. 2 つの角 $\angle ABC$ と $\angle CBD$ について，$A - B - D$ が成り立つとき，それら 2 つの角を**直線対（*linear pair*）**とよぶ．

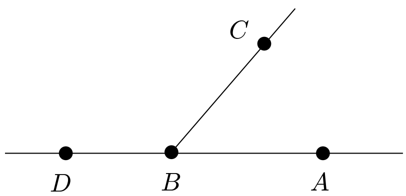


図 9

補題 10.1. 直線 $\overleftrightarrow{AB}$ に対して，同じ側にある点 C, D について，$m(\angle ABC) < m(\angle ABD)$ ならば，$C \in \mathrm{Int}(\angle ABD)$．

証明. 直線 $\overleftrightarrow{BD}$ に対して，A と C が同じ側にあることをいえばよい．

もし $C \in \overleftrightarrow{BD}$ ならば，$C \in \mathrm{Int}(\overrightarrow{BD})$．こうして，$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC}$ となり，$\angle ABD = \angle ABC$．つまり，角の大きさも一致し，矛盾．

もし C と A が直線 $\overleftrightarrow{BD}$ に対して異なる側にあるならば，$\overline{AC} \cap \overleftrightarrow{BD} \neq \varnothing$．Crossbar の逆から，$D \in \mathrm{Int}(\angle ABC)$．

Angle Addition Axiom により,

$$m(\angle ABD)+m(\angle DBC)=m(\angle ABC)<m(\angle ABD)$$

となるが，$m(\angle DBC)<0$ は不可. □

定理 10.1 (Linear Pair Theorem)**.** 角 $\angle ABC$，$\angle CBD$ が直線対を形成するならば,

$$m(\angle ABC)+m(\angle CBD)=180.$$

証明. $\alpha=m(\angle ABC)$，$\beta=m(\angle CBD)$ とおいて，$\alpha+\beta=180$ を示す.

まず，$\alpha+\beta<180$ と仮定する．Angle Construction Axiom により，直線 $\overleftrightarrow{AB}$ に対して，C と同じ側にある点 E で，$m(\angle ABE)=\alpha+\beta$ なるものが一意的に存在する．$m(\angle ABC)<m(\angle ABE)$ だから，補題 10.1 により，$C\in\mathrm{Int}(\angle ABE)$．Angle Addition Axiom により,

$$\alpha+m(\angle CBE)=\alpha+\beta.$$

つまり，$m(\angle CBE)=\beta$.

一方，$E\in\mathrm{Int}(\angle CBD)$ である．なぜなら，$C\in\mathrm{Int}(\angle ABE)$ だから，Crossbar Theorem により，$\overrightarrow{BC}\cap\overline{AE}\neq\varnothing$. こうして，直線 $\overleftrightarrow{BC}$ に対して，A と E は異なる側にある．直線 $\overleftrightarrow{BC}$ に対して，A と D は異なる側にあるから，こうして直線 $\overleftrightarrow{BC}$ に対して，D と E は同じ側にある.

Angle Addition Axiom より,

$$\beta+m(\angle EBD)=\beta.$$

つまり，$m(\angle EBD)=0$ となり矛盾.

次に，$\alpha+\beta>180$ と仮定する．$\alpha,\beta<180$ だから，$\alpha+\beta<360$．よって，$0<\alpha+\beta-180<180$．Angle Construction Axiom により，直線 $\overleftrightarrow{AB}$ に対して，C と同じ側にある点 F で，$m(\angle ABF)=\alpha+\beta-180$ なるものが一意的に存在する．$\alpha+\beta-180<\alpha$ だから，補題 10.1 により，$F\in\mathrm{Int}(\angle ABC)$．Angle Addition Axiom により,

$$m(\angle ABF)+m(\angle FBC)=\alpha.$$

つまり，$m(\angle FBC)=180-\beta$.

一方，$C\in\mathrm{Int}(\angle FBD)$ である（なぜか？)．再び Angle Addition Axiom より,

$$m(\angle FBC)+m(\angle CBD)=m(\angle FBD).$$

つまり，$m(\angle FBD)=180$ となり矛盾. □

定義 10.3. 2 つの角 $\angle ABC$ と $\angle A'BC'$ について，$A-B-A'$ かつ $C-B-C'$ が成り立つとき，**対頂角対（*vertical pair*）**とよぶ.（図 10 参照.）

問題 10.1. 対頂角対をなす 2 つの角は合同であることを示せ.

定義 10.4. 2 つの直線 l,l' が**垂直（*perpendicular*）**であるとは，$l\cup l'$ が直角を含むときをいう．このとき，$l\perp l'$ と表す．半直線や線分に対しても，それらの定める直線に基づいて，垂直性を定義する.

定理 10.2. 直線 l と点 $A\in l$ が与えられたとき，A を通り，l に垂直な直線がただ 1 つ存在する.

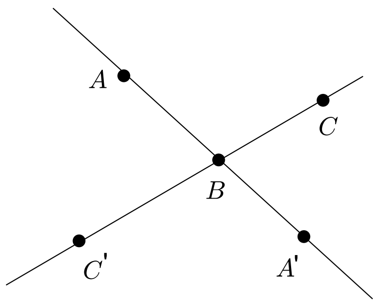


図 10

証明. $B \in l$ を $A \neq B$ に選ぶ．H を l の定める半平面とすると，Angle Construction Axiom により，半直線 $\overrightarrow{AP}$ $(P \in H)$ で，$m(\angle PAB) = 90$ となるものが一意に存在する．直線 $\overleftrightarrow{AP}$ が求める直線である．

次に，A を通り，l に垂直な直線 m があったとする．$l \cap m = \{A\}$ なので，m 上の点 Q で，$Q \in H$ となるものが存在する．このとき，半直線 $\overrightarrow{AQ}$ に対して，$m(\angle QAB) = 90$ なので，Angle Construction Axiom により，$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ}$. こうして，$\overleftrightarrow{AP} = \overleftrightarrow{AQ} = m$. □

11 中立幾何

$\triangle ABC$ に対して，混乱の恐れがない場合，

$$\angle A = \angle CAB, \quad \angle B = \angle ABC, \quad \angle C = \angle BCA$$

と表記する．

定義 11.1. 分度器幾何において，2 つの三角形 $\triangle ABC$，$\triangle DEF$ を考える．全単射 $f : \{A, B, C\} \to \{D, E, F\}$ で

$$\overline{AB} \simeq \overline{f(A)f(B)}, \quad \overline{BC} \simeq \overline{f(B)f(C)}, \quad \overline{CA} \simeq \overline{f(C)f(A)},$$
$$\angle A \simeq \angle f(A), \qquad \angle B \simeq \angle f(B), \qquad \angle C \simeq \angle f(C)$$

を満たすものが存在するとき，$\triangle ABC$ と $\triangle f(A)f(B)f(C)$ は**合同（*congruent*）**であるという．もし $f(A) = D$, $f(B) = E$，$f(C) = F$ ならば $\triangle ABC \simeq \triangle DEF$ と表す．

定義 11.2. 分度器幾何が**二辺夾角公理（*Side-Angle-Side Axiom*: *SAS*）**を満たすとは，2 つの三角形 $\triangle ABC$，$\triangle DEF$ が $\overline{AB} \simeq \overline{DE}$，$\angle B \simeq \angle E$，$\overline{BC} \simeq \overline{EF}$ を満たすならば $\triangle ABC \simeq \triangle DEF$ であるときをいう．

もちろん，期待されるように，ユークリッド平面も双曲平面も SAS を満たす．しかし，「二辺夾角」という条件は，分度器幾何においては必ずしも三角形の合同条件とはならない．（SAS の成立しない分度器幾何が知られているため．）

定義 11.3. *SAS* をみたす分度器幾何を，**中立幾何（*neutral geometry*）**という．

定義 11.4. 少なくとも 2 つの辺が合同であるような三角形を**二等辺三角形（*isosceles triangle*）**という．$\triangle ABC$ が二等辺三角形であり，$\overline{AB} \simeq \overline{AC}$ ならば，$\angle B$ と $\angle C$ を**底角（*base angle*）**という．また，3 つの辺が合同である三角形を**正三角形（*equilateral triangle*）**という．

定理 11.1 (Pons Asinorum)**.** 中立幾何において，二等辺三角形の底角は合同である．

証明. 二等辺三角形 $\triangle ABC$ において，$\overline{AB} \simeq \overline{AC}$ とする．$\triangle ABC$ と $\triangle ACB$ に対して，$\overline{AB} \simeq \overline{AC}$，$\angle BAC = \angle CAB$，$\overline{AC} \simeq \overline{AB}$ だから，SAS により，$\triangle ABC \simeq \triangle ACB$．よって，$\angle B \simeq \angle C$． □

12 三角形の合同条件

以降，中立幾何を考える．

定理 12.1 (Angle-Side-Angle: ASA)**.** $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ に対して，

$$\angle A \simeq \angle D,\ \overline{AB} \simeq \overline{DE},\ \angle B \simeq \angle E$$

ならば，$\triangle ABC \simeq \triangle DEF$．

証明. $\overline{BC} \simeq \overline{EF}$ ならば，SAS より $\triangle ABC \simeq \triangle DEF$．そこで，$BC > EF$ と仮定して十分．このとき，Segment Construction Theorem により，$B - G - C$ となる点 G で，$BG = EF$ となるものが一意的に存在する．SAS により，$\triangle ABG \simeq \triangle DEF$．よって，$\angle EDF \simeq \angle BAG$．しかし，$G \in \mathrm{Int}(\angle BAC)$ だから，$m(\angle BAG) < m(\angle BAC) = m(\angle EDF)$ となり矛盾． □

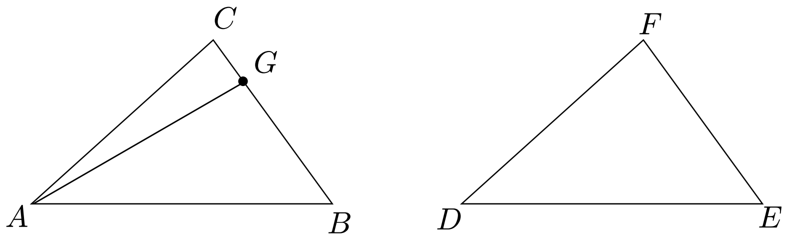


図 11

問題 12.1 (Pons Asinorum の逆)**.** $\triangle ABC$ において，$\angle B \simeq \angle C$ ならば $\overline{AB} \simeq \overline{AC}$ であることを示せ．

定理 12.2 (Side-Side-Side: SSS)**.** $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ に対して，

$$\overline{AB} \simeq \overline{DE},\ \overline{BC} \simeq \overline{EF},\ \overline{CA} \simeq \overline{FD}$$

ならば，$\triangle ABC \simeq \triangle DEF$．

証明. SAS を使って，$\triangle DEF$ の複製を $\triangle ABC$ の下側に作る．Angle Construction Axiom により，直線 $\overleftrightarrow{AB}$ に対して，C とは異なる側に半直線 $\overrightarrow{AH}$ で，$\angle BAH \simeq \angle EDF$ なるものが一意的に存在する．Segment Construction Theorem により，点 $C' \in \overrightarrow{AH}$ で $\overline{AC'} \simeq \overline{DF}$ なるものが存在する．SAS によって，$\triangle DEF \simeq \triangle ABC'$．

あとは，$\triangle ABC \simeq \triangle ABC'$ を示せばよい．点 C と C' は直線 $\overleftrightarrow{AB}$ に対して異なる側にあるので，$\overline{CC'} \cap \overleftrightarrow{AB} = \{G\}$ である．このとき，直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 上での G の位置に関して，5 通りの可能性がある：

(i) $G - A - B$
(ii) $G = A$
(iii) $A - G - B$
(iv) $G = B$

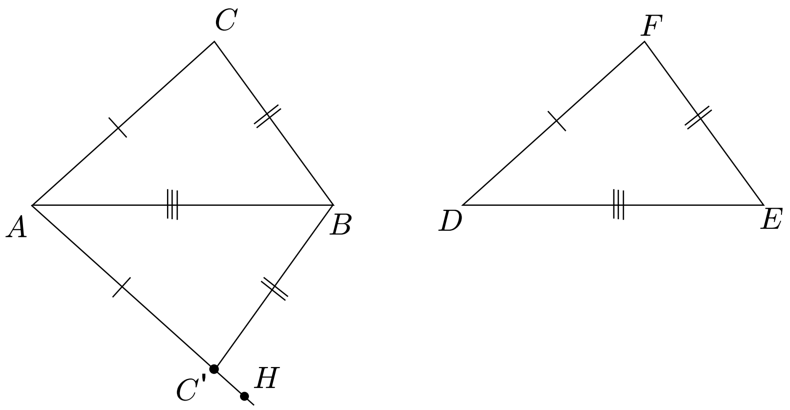


図 12

(v) $A-B-G$

(i) $G-A-B$ だから，C, A, C' は共線的ではない．よって，$\triangle ACC'$ は二等辺三角形をなし，$\angle ACC' \simeq \angle AC'C$．同様に，$\triangle BCC'$ は二等辺三角形をなし，$\angle BCC' \simeq \angle BC'C$．

さて，$G-A-B$ だから，$A \in \mathrm{Int}(\angle BCG) = \mathrm{Int}(\angle BCC')$．同様に，$A \in \mathrm{Int}(\angle BC'C)$．Angle Addition Axiom を使って，

$$m(\angle BCA) + m(\angle ACC') = m(\angle BCC') = m(\angle BC'C) = m(\angle BC'A) + m(\angle AC'C).$$

よって，$\angle BCA \simeq \angle BC'A$．SAS により，$\triangle ABC \simeq \triangle ABC'$ を得る．

(ii) $\triangle BCC'$ は二等辺三角形をなし，$\angle BCC' \simeq \angle BC'C$．SAS により，$\triangle ABC \simeq \triangle ABC'$ を得る．

その他も同様なので省略する． □

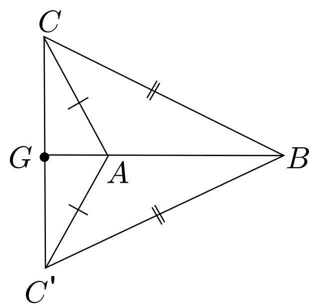


図 13

PSA と Pasch's Theorem が同値であったように，分度器幾何に対して SAS と ASA は同値である．

問題 12.2. 分度器幾何が ASA を満たすならば，SAS を満たすことを証明せよ．

定理 12.3. 直線 l と点 $A \notin l$ に対して，A を通り，l に垂直な直線が少なくとも 1 つ存在する．

実際には，そのような垂線はただ 1 つしか存在しないことがのちに示される．

証明. 直線 l 上に異なる 2 点 B, C を選ぶ．Angle Construction Axiom より，l に対して A と異なる側に半直線 $\overrightarrow{BH}$ で，$\angle ABC \simeq \angle HBC$ なるものが存在する．

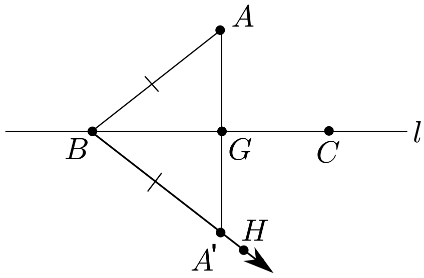


図 14

Segement Construction Theorem より，点 $A' \in \overrightarrow{BH}$ で，$\overline{BA'} \simeq \overline{BA}$ なるものが存在する．点 A と A' は l の異なる側にあるので，$\overline{AA'}$ は l と点 G で交わる．

もし $G \neq B$ ならば，SAS により，$\triangle ABG \simeq \triangle A'BG$．よって，$\angle AGB \simeq \angle A'GB$．しかし，これら 2 つの角は直線対をなすので，Linear Pair Theorem により

$$m(\angle AGB) + m(\angle A'GB) = 180.$$

こうして，$m(\angle AGB) = 90$ とわかり，$\overleftrightarrow{AA'} \perp l$．

もし $G = B$ ならば，$\angle ABC$ と $\angle CBA'$ は直線対をなし，それらは合同だったことから，上と同様にして，$m(\angle ABC) = 90$．よって，$\overleftrightarrow{AA'} \perp l$． □

13　外角定理

定義 13.1. $\triangle ABC$ に対して，$A - C - D$ なる点 D をとるとき，$\angle BCD$ を $\triangle ABC$ の（頂点 C での）**外角（*exterior angle*）**という．また，外角 $\angle BCD$ に対して，$\angle A$ と $\angle B$ を **隣接しない内角（*remote interior angle*）**という．$B - C - E$ となる点 E に対して，$\angle ACE$ もまた頂点 C での外角である．同様に，ほかの頂点での外角も定義される．

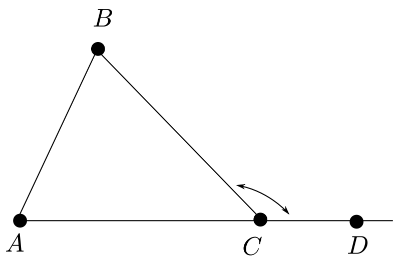


図 15

問題 13.1. 三角形の 1 つの頂点における外角は 2 つある．それらは合同であることを示せ．

次の Exterior Angle Theorem は有用である．

定理 13.1 (Exterior Angle Theorem)**.** 三角形の任意の外角は，隣接しない内角のいずれよりも大きい．

なお，角の大小関係は，角度の大小関係によって定めている．

証明. $\triangle ABC$ に対して，$A-C-D$ とする．$\angle BCD > \angle ABC$ 及び $\angle BCD > \angle BAC$ を示す．

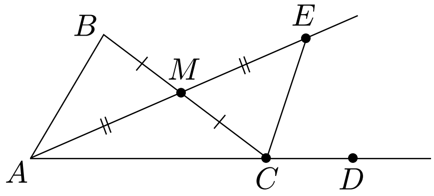


図 16

線分 $\overline{BC}$ の中点を M とする．半直線 $\overrightarrow{AM}$ 上に，$A-M-E$ かつ $\overline{AM} \simeq \overline{ME}$ となる点 E を選ぶ．$\angle AMB$ と $\angle EMC$ は対頂角対だから，合同である．SAS により，$\triangle ABM \simeq \triangle ECM$．こうして，$\angle ABC \simeq \angle ECB$．

直線 $\overleftrightarrow{BC}$ に関して，A と E は異なる側にあり，A と D も異なる側にある．よって，D と E は同じ側にあり，これより $E \in \mathrm{Int}(\angle BCD)$ がわかる．Angle Addition Axiom より，$m(\angle DCE) + m(\angle ECB) = m(\angle BCD)$．こうして，$\angle BCD > \angle ECB \simeq \angle ABC$．

次に，$\angle BCD > \angle BAC$ を示すために，$B-C-D'$ となる点 D' を選ぶ．上の議論から，$\angle ACD' > \angle BAC$．しかし，$\angle ACD'$ と $\angle BCD$ は対頂角対なので合同である．こうして，$\angle BCD > \angle BAC$． □

定理 13.2 (Existence and Uniqueness of Perpendiculars)**.** 直線 l と点 A に対して，A を通り，l に垂直な直線がただ 1 つだけ存在する．

証明. $A \in l$ のときはすでに示したので，$A \notin l$ の場合を考える．そのような垂線の存在はすでに示した．よって，あとは一意性を示す．

点 A を通り，l に垂直な異なる 2 つの直線 l', l'' を考える．$l' \cap l = \{B\}$，$l'' \cap l = \{C\}$ とおく．l' と l'' は異なるので，$B \neq C$ である．

直線 l 上に $B-C-D$ となる点 D を選ぶ．$\triangle ABC$ において，$\angle ACD$ は頂点 C における外角であり，Exterior Angle Theorem より，$\angle ACD > \angle ABC$．しかし，これらの角はともに直角だから矛盾． □

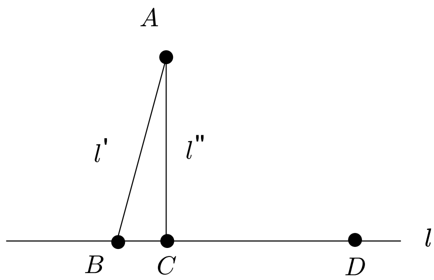


図 17

現時点では，三角形の内角の和に関して何もわからないため，次の定理は，単純に ASA には帰着できない．

定理 13.3 (Side-Angle-Angle: SAA)**.** $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ に対して，

$$\overline{AB} \simeq \overline{DE},\ \angle A \simeq \angle D,\ \angle C \simeq \angle F$$

ならば，$\triangle ABC \simeq \triangle DEF$．

証明. もし $\overline{AC} \simeq \overline{DF}$ ならば，SAS により終了．そこで $\overline{AC} \not\simeq \overline{DF}$ と仮定する．$AC < DF$ として十分．Segment Construction Theorem より，$D - G - F$ なる点 G で，$AC = DG$ なるものが存在する．SAS により，$\triangle ABC \simeq \triangle DEG$．よって，$\angle ACB \simeq \angle DGE$.

$\triangle EGF$ において，$\angle DGE$ は頂点 G での外角であり，Exterior Angle Theorem より，$\angle DGE > \angle GFE = \angle DFE \simeq \angle ACB$ となり，矛盾. □

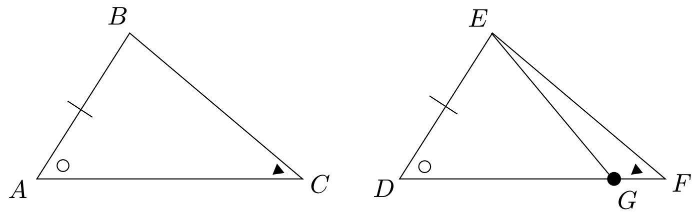


図 18

定理 13.4. 三角形において，長い辺は，より大きい角に向かいあう．

証明. $\triangle ABC$ において，$AB > AC$ とする．このとき，$\angle C > \angle B$ を示す．まず，$A - C - D$ かつ $AD = AB$ となる点 D がとれる．

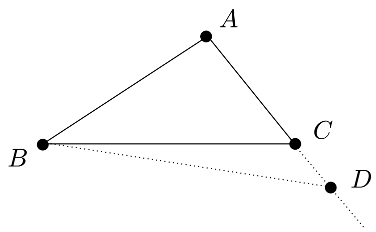


図 19

$A - C - D$ だから $C \in \mathrm{Int}(\angle ABD)$ かつ $\angle ABC < \angle ABD$．しかし $\triangle ABD$ は二等辺三角形だから，$\angle ABD \simeq \angle ADB$．$\triangle BCD$ に対する Exterior Angle Theorem より，$\angle ADB < \angle ACB$．こうして，

$$\angle ABC < \angle ABD \simeq \angle ADB < \angle ACB$$

を得る． □

問題 13.2. 三角形において，大きい角は，より長い辺に向かいあうことを示せ.

14 直角三角形

定義 14.1. $\triangle ABC$ の 1 つの角が直角のとき，$\triangle ABC$ を**直角三角形**（***right triangle***）という．また，直角の向かい側の辺を**斜辺**（***hypotenuse***）という．

定理 14.1. 直角三角形には，直角は 1 つしか存在しない．残り 2 つの角は鋭角である．また，斜辺は他の 2 辺よりも長い．

証明. $\triangle ABC$ において，$\angle C$ が直角とする．$D-C-B$ なる点 D を選ぶ．Linear Pair Theorem より，$\angle DCA$ も直角である．Exterior Angle Theorem より，$\angle A$ も $\angle B$ も鋭角である．あとは，問題 13.2 より，$\overline{AB} > \overline{BC}$ 及び $\overline{AB} > \overline{CA}$ が従う． □

定義 14.2. $\triangle ABC$ が C で直角をもつ直角三角形のとき，$\overline{AC}$ と $\overline{BC}$ を $\triangle ABC$ の**脚**（***leg***）という．

定理 14.2 (Hypotenuse-Leg: HL)**.** $\triangle ABC$ が C で直角をもつ直角三角形，$\triangle DEF$ が F で直角をもつ直角三角形とする．もし，$\overline{AB} \simeq \overline{DE}$ かつ $\overline{AC} \simeq \overline{DF}$ ならば，$\triangle ABC \simeq \triangle DEF$.

証明. $\triangle ABC$ の複製を $\triangle DEF$ の隣に構築していく．まず，$E-F-G$ かつ $\overline{FG} \simeq \overline{BC}$ となる点 G を選ぶ．Linear Pair Theorem を用いて，$\angle DFG$ は直角とわかる．SAS により，$\triangle ABC \simeq \triangle DGF$. よって，$\overline{AB} \simeq \overline{DG}$ だから，$\triangle DEG$ は二等辺三角形である．こうして，$\angle DEF \simeq \angle DGF$. SAA により，$\triangle DEF \simeq \triangle DGF$. 以上から $\triangle ABC \simeq \triangle DEF$. □

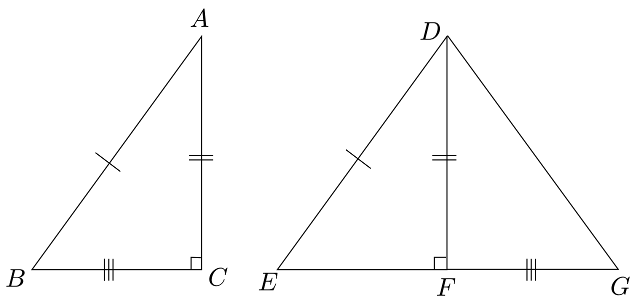


図 20

定理 14.3 (Hypotenuse-Angle: HA)**.** $\triangle ABC$ が C で直角をもつ直角三角形，$\triangle DEF$ が F で直角をもつ直角三角形とする．もし，$\overline{AB} \simeq \overline{DE}$ かつ $\angle A \simeq \angle D$ ならば，$\triangle ABC \simeq \triangle DEF$.

証明. SAA より，ただちに従う． □

15　平行性：EFP と EPP

定義 15.1. 異なる 2 つの直線 l, m について，$l \cap m = \varnothing$ のとき，**平行**であるといい，$l \parallel m$ と表す.

定義 15.2. 3 つの異なる直線 t, l, m について，t が他の 2 つと異なる点で交わるとき，t を l, m の**横断線**（***transversal***）という.

定義 15.3. 直線 $\overleftrightarrow{GH}$ は，直線 $\overleftrightarrow{AC}$ と $\overleftrightarrow{DF}$ の横断線とする．さらに，

- $\overleftrightarrow{GH} \cap \overleftrightarrow{AC} = \{B\}$
- $\overleftrightarrow{GH} \cap \overleftrightarrow{DF} = \{E\}$
- $A - B - C$，$D - E - F$，$G - B - E - H$
- A と D は $\overleftrightarrow{GH}$ の同じ側にある．

このとき，$\angle ABE$ と $\angle FEB$ を**錯角対（*alternate interior angle pair*）**とよぶ．同様に，$\angle CBE$ と $\angle DEB$ を錯角対とよぶ．また，$\angle ABG$ と $\angle DEB$ を**同位角対（*corresponding angle pair*）**とよぶ．同様に，$\angle CBG$ と $\angle FEB$，$\angle ABE$ と $\angle DEH$，$\angle CBE$ と $\angle FEH$ も同位角対である．

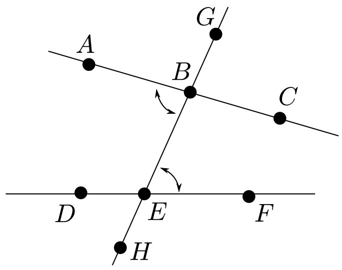


図 21

定理 15.1 (Alternate Interior Angles Theorem)**.** 2 つの異なる直線 l_1，l_2 が横断線 t をもち，ある錯角対が合同ならば，$l_1 \parallel l_2$.

証明. 図 21 のように，$\overleftrightarrow{GH} = t$，$\overleftrightarrow{AC} = l_1$，$\overleftrightarrow{DF} = l_2$ とする．$\angle ABE \simeq \angle BEF$ とする．

もし l_1 と l_2 が平行でないならば，$l_1 \cap l_2 \neq \varnothing$ だから，点 P で交わるとしよう．$\triangle BEP$ を考える．直線 t に対して，P が A と同じ側にあるならば，$\angle BEF$ は頂点 E での外角であり，Exterior Angle Theorem より，$\angle BEF > \angle ABE$ となり矛盾．直線 t に対して，P が A と異なる側にある場合も同様． □

問題 15.1 (Corresponding Angles Theorem)**.** 2 つの直線 l_1，l_2 が横断線 t をもち，ある同位角対が合同ならば，$l_1 \parallel l_2$ であることを示せ．

定理 15.2. l_1 と l_2 が共通の垂線をもつならば，$l_1 \parallel l_2$.

証明. 直線 l を共通の垂線とし，$l \cap l_1 = \{P\}$，　$l \cap l_2 = \{Q\}$ とする．$P \neq Q$ ならば，定理 15.1 あるいは問題 15.1 より，$l_1 \parallel l_2$．$P = Q$ ならば，垂線の一意性より，$l_1 = l_2$ でなければならない． □

定理 15.3 (Double Perpendicular Construction)**.** 直線 l と点 $P \notin l$ に対して，P を通り，l に平行な直線が存在する．

証明. P から l への垂線の足を Q とする．次に，点 P での直線 $\overleftrightarrow{PQ}$ への垂線を l' とする．このとき，$\overleftrightarrow{PQ}$ は l と l' の共通垂線である．定理 15.2 により，$l \parallel l'$. □

定義 15.4. ユークリッドの第 5 公準（*Euclid's Fifth Postulate*: *EFP*） とは，以下が成立することをいう．直線 $\overleftrightarrow{BC}$ が直線 $\overleftrightarrow{DC}$ と直線 $\overleftrightarrow{AB}$ の横断線であり，

- A と D は $\overleftrightarrow{BC}$ の同じ側にある
- $m(\angle ABC) + m(\angle BCD) < 180$

を満たすならば，$\overleftrightarrow{AB}$ と $\overleftrightarrow{CD}$ は，直線 $\overleftrightarrow{BC}$ に対して A 及び D と同じ側にある点 E で交わる．

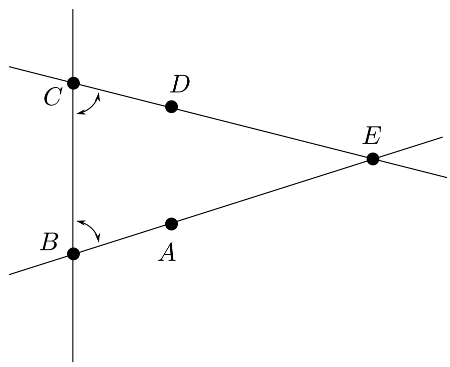


図 22

定理 15.4. 中立幾何が EFP を満たすならば，直線 l と l 上にない点 P が与えられたとき，点 P を通って，l に平行な直線がただ 1 つだけ存在する．

証明. 点 P から l への垂線の足を Q とし，P での $\overleftrightarrow{PQ}$ への垂線を l' とする．定理 15.3 より，l' は求める平行線である．

次に，$A - P - B$ となる直線 $\overleftrightarrow{AB}$ を考える．$\angle APQ$ と $\angle QPB$ は直線対をなすから，Linear Pair Theorem より，$m(\angle APQ) + m(\angle QPB) = 180$.

もし $\overleftrightarrow{AB} \neq l'$ ならば，点 P での垂線の一意性より，$\angle APQ$ と $\angle QPB$ の一方は鋭角である．$\angle APQ$ が鋭角としてよい．Q での角はすべて直角だから，EFP より，$\overleftrightarrow{AB} \cap l \neq \varnothing$. つまり，$\overleftrightarrow{AB}$ と l は平行ではない．こうして，l' が唯一の平行線であることが示された． □

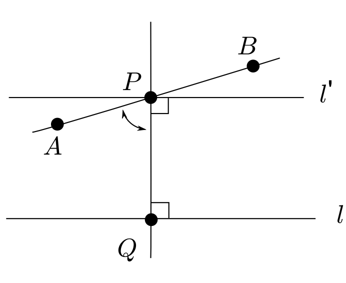


図 23

定義 15.5. ユークリッドの平行線公理（*Euclidean Parallel Postulate*: *EPP*） とは，任意の直線 l と任意の点 $P \notin l$ に対して，P を通り l に平行な直線がただ 1 つ存在することをいう．

EPP は，**プレイフェアの公理（Playfair's Parallel Postulate）**ともよばれる．上でみたように，EFP は EPP を導く．次の示すように逆も成立し，中立幾何に対して EPP と EFP は同値となる．

定理 15.5. *EPP を満たす中立幾何は，EFP を満たす．*

証明. 直線 $\overleftrightarrow{BC}$ が直線 $\overleftrightarrow{DC}$ と直線 $\overleftrightarrow{AB}$ の横断線であり，

- A と D は $\overleftrightarrow{BC}$ の同じ側にある
- $m(\angle ABC) + m(\angle BCD) < 180$

を満たすとしよう．$\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{CD} \neq \varnothing$ を示したい．

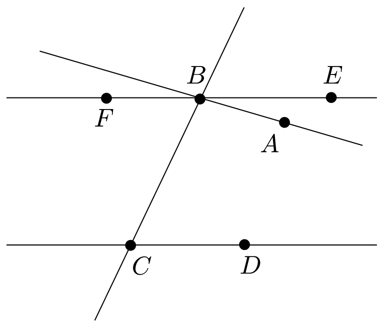


図 24

Angle Construction Axiom より，$\overleftrightarrow{BC}$ に対して点 A と同じ側にある点 E で，

$$m(\angle EBC) = 180 - m(\angle BCD)$$

なるものをとれる．さらに，$F - B - E$ となる点 F をとる．Linear Pair Theorem より，$\angle FBC \simeq \angle BCD$ がわかる．

定理 15.1 より，$\overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ である．$\overleftrightarrow{BA} \neq \overleftrightarrow{BE}$ だから，EPP により，$\overleftrightarrow{BA}$ は $\overleftrightarrow{CD}$ に平行ではない．したがって，$\overleftrightarrow{BA} \cap \overleftrightarrow{CD} \neq \varnothing$．そこで交点を G としよう．もし G が直線 $\overleftrightarrow{BC}$ に対して，A と同じ側にあれば終わり．A と異なる側にあれば，$\triangle BCG$ に対して，外角定理より，$m(\angle GBC) < m(\angle BCD)$．一方，LPT から，$m(\angle ABC) + m(\angle GBC) = 180$ である．よって，

$$m(\angle ABC) + m(\angle BCD) > m(\angle ABC) + m(\angle GBC) = 180$$

となり，仮定に反する． □

問題 15.2. 中立幾何が *EPP* を満たすとする．2 つの直線 l_1，l_2 が横断線 t をもち，$l_1 \parallel l_2$ ならば，錯角対は合同であることを示せ．（*Angle Construction Axiom* を利用せよ．）

問題 15.3. 中立幾何が *EPP* を満たすとする．2 つの直線 l_1，l_2 が横断線 t をもち，$l_1 \parallel l_2$ ならば，同位角対は合同であることを示せ．

問題 15.4. 中立幾何に対して，2 つの直線 l_1，l_2 が横断線 t をもち，$l_1 \parallel l_2$ ならば，錯角対は合同であるとする．このとき，*EPP* が成立することを示せ．

問題 15.5. 中立幾何が *EPP* を満たすとする．このとき，任意の三角形に対して，3 つの角の大きさの和は 180 になることを示せ．

ここでは，紹介しかできないが，EFP/EPP と同値な命題は数多く知られている．最後に，いくつか述べておく．

- 任意の三角形について，内角の和が 180 である．
- 内角の和が 180 になる三角形が存在する．
- 内角の和が 180 になる直角三角形が存在する．
- 長方形が存在する．
- 相似だが，合同でない 2 つの三角形が存在する．
- $\ell \parallel m$ かつ $m \parallel n$ ならば，$\ell \parallel n$.
- 三角形の 3 つの辺の垂直二等分線は，1 点で交わる．
- 任意の三角形に外接円が存在する．

参考文献

[1] 溝上武實，初等幾何入門，日本評論社，2005 年.

[2] 砂田利一，幾何入門，岩波書店，2004 年.

[3] 中村幸四郎，寺坂英孝，伊東俊太郎，池田美恵　訳・解説，ユークリッド原論，共立出版，1998 年.

[4] 斎藤憲，三浦伸夫，エウクレイデス全集，第 1 巻，東京大学出版会，2008 年.

[5] R. Fitzpatrick, *Euclid's elements of geometry*,
available at: `http://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pdf`

[6] D. Hilbert, *The foundations of geometry*, available at: `http://www.gutenberg.org/ebooks/17384`

[7] J. Lee, *Axiomatic geometry*, Undergraduate Texts 21, American Mathematical Society, 2013.

[8] G. Martin, *The foundations of geometry and the non-Euclidean plane*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1996.

[9] E. Moise, *Elementary geometry from an advanced standpoint*, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-Palo Alto, Calif.-London 1963.

[10] R. Millman and G. Parker, *Geometry, A metric approach with models*, Second edition, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1991.

[11] G. Venema, *The foundations of geometry*, 2nd edition, Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2012.

公理的アプローチで幾何を構築しているテキストの世界的名著は，文献 [8]，[9]，[10] である．[8] はかなり専門的で，少し読みにくい．この冊子は，学部生向けに書かれた [10] に基づいて作成している．文献 [7]，[11] は新しいテキストで，読みやすい．文献 [1]，[2] は，私の知る限り，公理的に幾何学を構築する数少ない和書である．[1] は，主として [10] に沿っている．英語に抵抗感がないのであれば，[10] が最も推薦できるテキストである．