確率測度の定義域としてべき集合を取るとうまく行かない例

原点を中心とする単位円周上からランダムに点 Q を選ぶ試行を考える. 点 Q と x 軸との為す角を θ とし, Q の "座標" を $x = \theta/(2\pi)$ と定義すると $0 \leq x < 1$ となる. 試行の結果を, 選ばれた点の座標で表すことにすると標本空間は

$$\Omega = [0, 1)$$

となる. Q を $2\pi r$ だけ回転させた点 Q' の座標を $g_r x$ と表すと

$$g_r x = \begin{cases} x + r & (x + r < 1) \\ x + r - 1 & (x + r \geq 1) \end{cases}$$

となる.

円周上のどの点も同じ確からしさで選ばれるならば, 点 Q と Q' の起こりやすさは同じであるから, $A \subset \Omega$ に対して, 確率 $\mathrm{P}(A)$ が定義されるならば

$$g_r A = \{g_r x;\ x \in A\}$$

とするとき,

<eq-1>

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(g_r A) \tag{1}$$

となるべきである.

(1) を満たすような確率測度の定義域として, べき集合 $\wp(\Omega)$ ととると矛盾が起こることを示す.

(i) $x, y \in \Omega$ の同値関係として

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \text{ は有理数}$$

を考える. x の同値類を $A(x)$ と表すと

$$A(x) = \{y \in \Omega;\ x \sim y\} = \{g_r x;\ r \in \Omega \cap \mathbb{Q}\}$$

が成り立つ.

(ii) $x, y \in \Omega$ に対して, $A(x) = A(y)$ または, $A(x) \cap A(y) = \emptyset$ なので, 相異なる同値類から代表元 λ を選び (選択公理を認める),

$$\Omega = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A(\lambda), \quad (\lambda \neq \lambda' \Rightarrow A(\lambda) \cap A(\lambda') = \emptyset)$$

と表す. このとき

$$\Omega = \bigcup_{r \in \Omega \cap \mathbb{Q}} g_r \Lambda, \quad (r \neq r' \Rightarrow g_r \Lambda \cap g_{r'} \Lambda = \emptyset)$$

が成り立つ.

(iii) $\Omega \cap \mathbb{Q}$ は可算無限集合なので,

$$\Omega \cap \mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \cdots\}$$

と表すと

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} g_{r_i}\Lambda$$

となるから, 可算加法性から

$$1 = \mathrm{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(g_{r_i}\Lambda)$$

(1) を P が満たすならば

$$1 = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(\Lambda)$$

となるが, このような実数値 $\mathrm{P}(\Lambda)$ は存在しない.