

問題 1. $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を確率空間とする.

- (1) P が $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率であることの定義を書け.
- (2) 確率の定義のみを用いて, $A, B \in \mathcal{B}, A \supset B$ ならば $P(A \cap B^c) = P(A) - P(B)$ であることを示せ. ただし, σ -集合体の性質 ($A \cap B^c \in \mathcal{B}$ など) は証明せずに用いてよい.
- (3) X を $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の確率変数とすると, $P(X \geq x) = 1 - P(X < x)$ であることを示せ.

問題 2. $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ を確率空間とし, $A, B \in \mathcal{B}, 0 < P(A) < 1$ とする.

このとき, $P(B|A) > P(B)$ ならば $P(B|A^c) < P(B)$ であることを証明せよ.

問題 3. X, Y を, 確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上で定義された確率変数とし, $F(x, y)$ を (X, Y) の同時分布関数, $F_X(x), F_Y(y)$ を, それぞれ X, Y の周辺分布関数とする.

このとき,

$$\begin{aligned} P((X, Y) = (a, b)) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \{F(a, b) - F(a, b - n^{-1}) - F(a - n^{-1}, b) + F(a - n^{-1}, b - n^{-1})\} \end{aligned}$$

が成り立つことを示せ.

問題 4. X, Y を, 確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上で定義された確率変数とする. このとき, X, Y が独立ならば, 任意の実数 a, b に対して $P(X \leq a, Y \geq b) = P(X \leq a)P(Y \geq b)$ が成り立つことを示せ.

問題 5. $\mathbb{N}$ を自然数の集合とし, $\mathcal{B}$ を $\mathbb{N}$ 上の σ -集合体とする.

X を $\mathbb{N}$ 上の実数値関数とし, $a_k = X(k)$ ($k \in \mathbb{N}$) とおく. このとき, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $X^{-1}(a_k) \in \mathcal{B}$ が成り立つならば, X は $(\mathbb{N}, \mathcal{B})$ 上の確率変数であることを示せ.

問題 6. $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ 上の σ -集合体 $\mathcal{B} = \{\emptyset, \{0, 1, 2\}, \{3\}, \Omega\}$ を考える. Ω 上の関数 $X(k) = k^3 + ak^2 + bk$ が $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率変数となるためには, a, b の値をどう定めれば良いか.

問題 7. 2次元確率変数 (X, Y) の分布関数が, ある定数 a, b, c を用いて

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & (x < 0 \text{ または } y < 0) \\ a & (0 \leq x < 1 \text{ かつ } 0 \leq y < 1) \\ b & (0 \leq x < 1 \text{ かつ } 1 \leq y) \\ c & (1 \leq x \text{ かつ } 0 \leq y < 1) \\ 1 & (1 \leq x \text{ かつ } 1 \leq y) \end{cases}$$

で与えられるとする. ただし, $0 < a < b < c, 1 + a > b + c$ である. このとき, X, Y が独立であるための必要十分条件を求めよ.

解答 1 (1) 略

$$(2) A_1 = A \cap B^c, A_2 = B, A_k = \emptyset (k \geq 3) \text{ とおくと } A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$$

である. したがって可算加法性より

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \sum_{k=3}^{\infty} P(A_k) = P(A \cap B^c) + P(B) + \sum_{k=3}^{\infty} P(\emptyset)$$

$$P(A) \leq 1 \text{ となるためには, } P(\emptyset) = 0. \text{ したがって } P(A) - P(B) = P(A \cap B^c)$$

解答 2 $P(B \cap A) > P(B)P(A)$ であるから $P(B) = P(B \cap A) < P(B)(1 - P(A))$.

$$P(B \cap A^c) < P(B)P(A^c) \text{ となり, } P(B|A^c) < P(B)$$

解答 3 $A_n = (a - n^{-1}, a] \times (b - n^{-1}, b]$ おくと, A_n は単調減少列である

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \{F(a, b) - F(a, b - n^{-1}) - F(a - n^{-1}, b) + F(a - n^{-1}, b - n^{-1})\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P_{(X, Y)}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P_{X, Y}(\{(a, b)\}) \end{aligned}$$

解答 4

以下, $A \setminus B = A \cap (B^c)$ を表わす (集合の引き算)

$$(-\infty, a] \times [b, \infty) = (-\infty, a] \times \mathbb{R} \setminus (-\infty, a] \times (-\infty, b)$$

$$= (-\infty, a] \times \mathbb{R} \setminus (-\infty, a] \times \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, b - \frac{1}{n}],$$

$$(-\infty, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, b - \frac{1}{n}],$$

$$(-\infty, b - \frac{1}{n}] \subset (-\infty, b - \frac{1}{n+1}] \quad (n = 1, 2, \dots) \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} P(X \leq a, Y \geq b) &= P(X \leq a) - P(X \leq a, Y < b) \\ &= P(X \leq a) - \lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq a, Y \leq b - n^{-1}) \\ &= P(X \leq a) - \lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq a)P(Y \leq b - n^{-1}) \\ &= P(X \leq a) - P(X \leq a)P(Y < b) = P(X \leq a)\{1 - P(Y < b)\} \\ &= P(X \geq a)P(Y \geq b) \end{aligned}$$

解答 5 任意の x に対して,

$$X^{-1}((-\infty, x]) = \sum_{a_k \leq x} X^{-1}(\{a_k\}) \in \mathcal{B}$$

解答 6 $a_k = X(k), (k = 0, 1, 2, 3)$ とおくと, $X^{-1}(\{a_0\}) = \{0, 1, 2\}$ または Ω である. いずれにしても $1, 2$ をふくむから $X(0) = X(1) = X(2)$

$$\text{したがって } 0 = 1 + a + b = 8 + 4a + 2b \text{ となり, } a = -3, b = 2$$

このとき, $X(3) = 27 - 27 + 2 = 2, X^{-1}(\{2\}) = \{3\} \in \mathcal{B}$ であるから 問題 5 より, X は確率変数である.

解答 7 $F_X(x) = F(x, \infty) = 0 \ (x < 0), \quad b \ (0 \leq x < 1), \quad 1 \ (1 \leq x),$

$F_Y(y) = F(\infty, y) = 0 \ (y < 0), \quad c \ (0 \leq y < 1), \quad 1 \ (1 \leq y)$

となる.

$$F_X(x)F_Y(y) = \begin{cases} 0 & (x < 0 \text{ または } y < 0) \\ bc & (0 \leq x < 1 \text{ かつ } 0 \leq y < 1) \\ b & (0 \leq x < 1 \text{ かつ } 1 \leq y) \\ c & (1 \leq x \text{ かつ } 0 \leq y < 1) \\ 1 & (1 \leq x \text{ かつ } 1 \leq y) \end{cases}$$

となるから, 独立であるための必要十分条件は $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$ より, $a = bc$.