確率・統計 A 演習　第 4 回テスト

2015.5.13

1. 事象列 $\{A_n\}$ に対して以下を示せ.

   (a) $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ $(n = 1, 2, \ldots)$ とするとき, $\lim_{n\to\infty} B_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

2. 以下の集合がボレル集合であることを示せ.

   $(-\infty, b), [a, \infty), (a, \infty), \{a\}$

3. $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ を確率空間, $A, B \in \mathcal{B}$ とし, $\mathrm{P}(B) \neq 0$ とする. B を固定し, $A \in \mathcal{B}$ に対して

$$\mathrm{P}_B(A) = \mathrm{P}(A|B)$$

   とおく. このとき, P_B は $(\Omega, \mathcal{B})$ 上の確率であることを示せ

4. $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ を確率空間とし, $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$ は互いに素で, $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$, また, $\mathrm{P}(B_i) > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ とする. このとき, 任意の $A \in \mathcal{B}$, $\mathrm{P}(A) > 0$ に対して

$$\mathrm{P}(B_i|A) = \frac{\mathrm{P}(B_i)\mathrm{P}(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(B_j)\mathrm{P}(A|B_j)}.$$

   が成り立つことを示せ.

ただし, 各問とも, σ-集合体の基本性質および, 確率測度の基本性質（単調性, 加法公式, 有限加法性, 劣加法性, 連続性等）は証明なしに用いてよい.