

確率・統計 A 演習 第 11 回テスト

2015.7.8

1. $X \sim N(0, 1)$ とし, $Y = e^X$ とおく. このとき以下の問いに答えよ.

- (1) Y の確率密度関数を求め, その確率密度関数を用いて $E(Y)$ を計算せよ.
- (2) 教科書の定理 3.1 を用いて, $E(Y)$ を計算し, その結果が (1) と一致することを確認せよ.

ただし, $N(0, 1)$ の確率密度関数は次で与えられる.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

2. 次の不等式が成り立つことを証明せよ. ただし, X, Y は確率変数とする.

- (1) $\{E(XY)\}^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$. (シュワルツの不等式)
- (2) $\sqrt{E((X+Y)^2)} \leq \sqrt{E(X^2)} + \sqrt{E(Y^2)}$. (三角不等式)

3. (線形変換に関する相関係数の不変性) 確率変数 X, Y , 定数 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ac > 0$ に対して, $U = aX + b$, $V = cY + d$ とおく. このとき, $\rho(U, V) = \rho(X, Y)$ となることを示せ.

4. U は $N(0, 1^2)$ に, V は $N(0, 2^2)$ に従う確率分布で, 互いに独立であるとする. $X = (U + V)/\sqrt{2}$, $Y = (U - V)/\sqrt{2}$ とおくと, 2次元確率分布 (X, Y) の共分散行列を求めよ.