確率・統計A　期末試験傾向と対策 その2

2019.7.26

問題1

$$f(x,y) = \begin{cases} Cx & (x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

は, ある2次元連続型確率変数 (X,Y) の確率密度関数である. ただし, C は定数である.

(1) C の値を求めよ.

(2) (X,Y) の特性関数を求めよ.

(3) 特性関数を利用して, X,Y の共分散 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ を求めよ.

(4) Y の周辺分布関数と周辺確率密度関数を求めよ.

(5) $Y=y$ が与えられたときの X の条件つき確率密度関数を求めよ.

(6) a を定数として, $Z=aX+Y$ とおく. $\mathrm{Cov}(Z,Y)=0$ となるような a の値を求めよ. このとき, Z と Y は独立か? 理由とともに答えよ.

問題2 X,Y は独立で, それぞれ, ガンマ分布 $Ga(p,\lambda), Ga(q,\lambda)$ に従う確率変数とする. ただし, p,q,λ は正の定数, $Ga(p,\lambda)$ の確率密度関数は次で与えられる.

$$f(x;p,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^p}{\Gamma(p)} e^{-\lambda x} x^{p-1} & (x > 0) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

(1) $X+Y \sim Ga(p+q,\lambda)$ であることを示せ.

(2) $p=1$ であるとき, X の特性関数を求めよ.

(3) $q=\dfrac{1}{2}$ であるとき, Y の特性関数を求めよ.

(4) p が有理数であるとき, X の特性関数を求めよ.

解答 1 (1)

$$1 = C\int_0^1 x\left\{\int_0^{1-x} dy\right\}dx = C\int_0^1 x(1-x)dx = \frac{C}{6}$$

より $C = 6$.

(2) $z = a+bi$ を複素定数とし, $e^{zx} = u(x)+iv(x)$ とする. ここで $u(x) = e^{ax}\cos(bx), v(x) = e^{ax}\sin(bx)$ である. このとき, $\dfrac{e^{zx}}{z}$ の実部と虚部は, それぞれ, $u(x), v(x)$ の原始函数であることがわかる. したがって, 次の計算では, 実部と虚部にわけずに積分を計算している. 実部と虚部にわけて, それぞれ, 積分を計算しても同じ結果になる.

部分積分も実部と虚部で部分積分して組合せれば複素数値関数のまま部分積分できることがわかる.

$$\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2) = \mathrm{E}[\exp(it_1X+it_2Y)] = 6\int_0^1 e^{it_1x}x\left\{\int_0^{1-x} e^{it_2y}dy\right\}dx$$

$$\int_0^{1-x} e^{it_2y}dy = \left[\frac{e^{it_2y}}{it_2}\right]_0^{1-x} = \frac{e^{it_2(1-x)}-1}{it_2}$$

$$\int_0^1 e^{it_1x}e^{it_2(1-x)}xdx = e^{it_2}\int_0^1 \exp\{i(t_1-t_2)x\}xdx$$

$$= e^{it_2}\left[\frac{e^{i(t_1-t_2)x}}{i(t_1-t_2)}x\right]_0^1 - \frac{e^{it_2}}{i(t_1-t_2)}\int_0^1 e^{i(t_1-t_2)x}dx$$

$$= \frac{e^{it_1}}{i(t_1-t_2)} - \frac{e^{it_2}}{i(t_1-t_2)}\frac{e^{i(t_1-t_2)}-1}{i(t_1-t_2)} = \frac{e^{it_1}}{i(t_1-t_2)} + \frac{e^{it_1}-e^{it_2}}{(t_1-t_2)^2}$$

$t_2 = 0$ とすると $\displaystyle\int_0^1 e^{it_1x}xdx = \frac{e^{it_1}}{it_1} + \frac{e^{it_1}-1}{t_1^2}$

$$\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2) = \frac{6}{it_2}\left\{\frac{e^{it_1}}{i(t_1-t_2)} + \frac{e^{it_1}-e^{it_2}}{(t_1-t_2)^2} - \left(\frac{e^{it_1}}{it_1} + \frac{e^{it_1}-1}{t_1^2}\right)\right\}$$

上記は, 分母が 0 でないような (t_1,t_2) における表現で, 分母が 0 となる場合は, 特性関数の連続性を用いて, $t_2 \to t_1, t_1 \to 0, t_2 \to 0$ などとした極限を計算すれば良いが, $\{t_1 = 0, t_2 \neq 0\}$, $\{t_1 \neq 0, t_2 = 0\}, \{t_1 = t_2 \neq 0\}$ に場合分けして別途計算する方が容易.

(3) 難しい計算ではないけど, 項が多すぎて面倒なので Mathematica さんに計算してもらうと

$$\varphi_{(X,Y)}(t_1,t_2) = 1 + i\left(\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{4}t_2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{10}t_1^2 + \frac{1}{5}t_1t_2 + \frac{1}{10}t_2^2\right) + \cdots$$

となるので, t_1, t_2, t_1t_2 の係数から

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{2},\ E(Y) = \frac{1}{4},\ \mathrm{E}(XY) = \frac{1}{10}$$
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{10} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{40}$$

この問題だと, 特性関数を微分するより確率密度関数を用いて積分を計算する方がずっと楽でした.

(4) Y の取り得る値は 0 以上 1 以下の実数なので, $0 < a < 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
F_Y(a) = 6\mathrm{P}(Y \le a) &= \int_0^1 x\left\{\int_0^{\min\{a,1-x\}} dy\right\}dx \\
&= 6\int_0^{1-a} x\left\{\int_0^{a} dy\right\}dx + 6\int_{1-a}^{1} x\left\{\int_0^{1-x} dy\right\}dx \\
&= 3a(1-a)^2 + 6\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{1-a}^{1} = 3a - 3a^2 + a^3
\end{aligned}
$$

$$
F_Y(y) = \begin{cases} 0 & (y \le 0) \\ 3y - 3y^2 + y^3 & (0 < y < 1) \\ 1 & (y \ge 1) \end{cases}
$$

$$
f_Y(y) = \begin{cases} 3 - 6y + 3y^2 & (0 < y < 1) \\ 0 & (\text{ その他 }) \end{cases}
$$

(5) $0 < y < 1$ のとき

$$
f_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{1 - 2y + y^2} & (0 < x < 1 - y) \\ 0 & (\text{ その他 }) \end{cases}
$$

(6) (3) の計算から $\mathrm{Var}(Y) = \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{16} = \dfrac{3}{80}$

$Z = \dfrac{3}{2}X + Y$ と $W = Y$ の同時確率密度関数を求める.

$z = \dfrac{3}{2}x + y, w = y$ の逆変換は　$x = \dfrac{2}{3}(z - w), y = w$

で, $0 \le x, 0 \le y, x + y \le 1$ より

$$
\begin{aligned}
&0 \le \frac{2}{3}(z - w), \quad 0 \le w, \quad \frac{2}{3}(z - w) + w = \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}w \le 1 \\
&\Leftrightarrow 0 \le w, \quad z \ge w, \quad z \le \frac{3}{2} - \frac{1}{2}w
\end{aligned}
$$

したがって, w を横軸, z を縦軸とした平面上で, (W, Z) の取りうる値の範囲は $(w, z) = (0, 0), (0, \dfrac{3}{2}), (1, 1)$ を頂点とする三角形の内部である.

$$
J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial z} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial z} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{3} & -\dfrac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \left|\det J\right| = \frac{2}{3}
$$

であるから

$$
f_{Z,W}(z, w) = \begin{cases} 4(z - w) & (0 \le w,\ z \ge w,\ z \le \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}w) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}
$$

$\mathrm{P}(Z \ge W) = 1$ なので, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5,\ 0.5 < W \le 1) = 0$ であるが

$\{(z, w) \,|\, z \le 0.5,\ 0 \le w,\ z > w,\ z \le \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}w\}$

$\{(z,w)\,|\,0.5 < w,\,0 \le w,\,z > w,\,z \le \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}w\}$
のいずれの領域でも $f_{Z,W}(z,w) > 0$ なので $\mathrm{P}(z \le 0.5) > 0, \mathrm{P}(W > 0.5) > 0$ となり, $0 = \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.5,\,0.5 < W \le 1) \ne \mathrm{P}(0 \le z \le 0.5)\mathrm{P}(1 \ge W > 0.5) > 0$.
したがって, Z, W すなわち Z, Y は独立でない.

解答 2 (1) まず, $Z = X + Y, B = \dfrac{X}{X+Y}$ とおき, (Z, B) の同時分布を求める.

$$\begin{cases} z = x + y \\ b = \dfrac{x}{x+y} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = bz \\ y = (1-b)z \end{cases},$$

$$x > 0, y > 0 \quad \Leftrightarrow \quad z > 0, 0 < b < 1$$

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial z} & \dfrac{\partial x}{\partial b} \\ \dfrac{\partial y}{\partial z} & \dfrac{\partial y}{\partial b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & z \\ 1-b & -z \end{pmatrix}, \quad \left|\det J\right| = z$$

X, Y は独立であるから, (X, Y) の同時確率密度関数は, $x > 0, y > 0$ のとき

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} e^{-\lambda x} x^{p-1} \frac{\lambda^q}{\Gamma(q)} e^{-\lambda y} x^{q-1}$$

したがって (Z, B) の確率密度関数は $z > 0, 0 < b < 1$ のとき

$$\begin{aligned} f_{(Z,B)}(z,b) &= f_{(X,Y)}(bz, (1-b)z)|\det J| \\ &= \frac{\lambda^{p+1}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} e^{-\lambda\, bz} e^{-\lambda\,(1-b)} (bz)^{p-1} \{(1-b)z\}^{q-1} z \\ &= \frac{\lambda^{p+1}}{\Gamma(p+q)} e^{-\lambda\, z^{p+q-1}} \times \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} b^{p-1}(1-b)^{q-1} \end{aligned}$$

$\times$ の前は, $Ga(p+q, \lambda)$ の確率密度関数であるから, $f_{(Z,B)}(z,b)$ を $z > 0$ の範囲で積分すると

$$f_B(b) = \int_0^\infty f_{(Z,B)}(z,b)dz = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} b^{p-1}(1-b)^{q-1}$$

したがって,

$$f_Z(z) = \int_0^1 f_{(Z,B)}(z,b)db = \frac{\lambda^{p+1}}{\Gamma(p+q)} e^{-\lambda\, z^{p+q-1}}$$

となり, Z, B は独立で, $Z \sim Ga(p+q, \lambda)$

(2) $p = 1$ のとき $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x > 0)$ であるから

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= \mathrm{E}[e^{itX}] = \lambda \int_0^\infty e^{itx} e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda - it)x} dx \\ &= \lambda \left[-\frac{e^{-(\lambda-it)x}}{\lambda - it} \right]_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda - it} \end{aligned}$$

(3) $p = q = \dfrac{1}{2}$ とすると, (1) より $X + Y \sim Ga(1, \lambda)$ である. (2) より

$$\frac{\lambda}{\lambda - it} = \varphi_{X+Y}(t) = \mathrm{E}[e^{it(X+Y)}] = \mathrm{E}[e^{itX}e^{itY}] = \mathrm{E}[e^{itX}]\mathrm{E}[e^{itY}] = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = \{\varphi_Y(t)\}^2$$

したがって, $\varphi_Y(t) = \left\{ \dfrac{\lambda}{\lambda - it} \right\}^{1/2}$

(4) $X_1, X_2, \ldots$ を独立に $Ga(n^{-1}, \lambda)$ に従う確率変数とすると, (1) と帰納法により $X_1 + \cdots + X_m \sim Ga(m/n, \lambda)$ であることがわかる. したがって, $m = n$ のとき

$$\frac{\lambda}{\lambda - it} = \varphi_{X_1 + \cdots + X_n}(t) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_{X_j}(t) = \left\{\varphi_{X_1}(t)\right\}^n$$
$$\varphi_{X_j}(t) = \left\{\frac{\lambda}{\lambda - it}\right\}^{1/n}$$

$m \neq n$ のとき

$$\varphi_{X_1 + \cdots + X_m}(t) = \left\{\varphi_{X_1}(t)\right\}^m = \left\{\frac{\lambda}{\lambda - it}\right\}^{m/n}$$

(5) $0 < q < p + 1$ のとき $e^{-\lambda x} x^{q-1} \leq e^{-\lambda x}(1 + x^p)$ であり, 右辺は $(0, \infty)$ で絶対可積分であるから, 優収束定理より

$$\lim_{q \to p} \int_0^\infty e^{itx} e^{-\lambda x} x^{q-1} dx = \int_0^\infty e^{itx} e^{-\lambda x} x^{p-1} dx$$

従って任意の正の実数 p についても　$Ga(p, \lambda)$ の特性関数は $\left\{\dfrac{\lambda}{\lambda - it}\right\}^p$ が成り立つ.