確率・統計B　レポート問題　解答

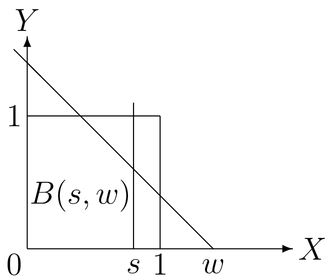
問題1. (1) W の確率分布関数を $G(w)$ とおくと,

$$G(w) = \mathrm{P}(W \le w) = \iint_{A(w)} dxdy = \begin{cases} 0 & (w \le 0) \\ \frac{1}{2}w^2 & (0 < w \le 1) \\ 1 - \frac{1}{2}(2-w)^2 & (1 < w \le 2) \\ 1 & (2 < w) \end{cases}$$

ただし、$A(w) = \{(x,y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1, x + y < w\}$.
したがって, W の確率密度関数は

$$g(w) = \frac{d}{dw}G(w) = \begin{cases} w & (0 < w \le 1) \\ 2 - w & (1 < w \le 2) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

(2) X と W の同時分布関数を $H(x,w)$ とおくと,
$0 \le s \le 1, 0 \le w - s \le 1$ のとき



$$H(s,w) = \mathrm{P}(X \le s, X + Y \le w) = \iint_{B(s,w)} dxdy$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{2}w^2 - \frac{1}{2}(w-s)^2 & (w \le 1) \\ 1 - \frac{1}{2}(1+s-w)^2 & (1 < w) \end{cases}$$

ただし, $B(s,w) = \{(x,y) \mid (0 < x < 1, 0 < y < 1, x < s, x + y < w\}$.
$s > 1$ のときは, $H(s,w) = G(w)$.
$w - s > 1$ のときは, $H(s,w) = s$.
それ以外のときは $H(s,w) = 0$.
したがって, (X,W) の同時確率密度関数は

$$h(s,w) = \frac{\partial^2}{\partial s \partial w}H(s,w) = \begin{cases} 1 & (0 \le s \le 1, 0 \le w - s \le 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

以上より, $W = r$ が与えられたときの X の条件付確率密度関数は $r \le 1$ のとき

$$f_{X|W=r}(x) = \begin{cases} \frac{1}{r} & (0 \le x \le r) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

$1 < r < 2$ のとき

$$f_{X|W=r}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-r} & (r - 1 \le x \le 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

問題 2. (1) X の特性関数は

$$\varphi_X(t) = \mathrm{E}[\exp(itX)] = e^{-\mu}\sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\frac{\mu^k}{k!} = e^{-\mu}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(e^{it}\mu)^k$$
$$= \exp\{\mu(e^{it}-1)\}$$

同様に, Y の特性関数は $\varphi_Y(t) = \exp\{\nu(e^{it}-1)\}$. したがって W の特性関数は

$$\varphi_W(t) = \mathrm{E}[e^{it(X+Y)}] = \mathrm{E}[e^{itX}e^{itY}] = \mathrm{E}[e^{itX}]\mathrm{E}[e^{itY}] = \exp\{(\mu+\nu)(e^{it}-1)\}$$

(2) $n < k$ のときは $\mathrm{P}(W=n, X=k) = \mathrm{P}(Y=n-k, X=k) \le \mathrm{P}(Y<0) = 0$. $n \ge k \ge 0$ のときは

$$\mathrm{P}(W=n, X=k) = \mathrm{P}(Y=n-k, X=k) = e^{-\nu}\frac{\nu^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!}$$

(3) 特性関数の形から, W は平均 $\mu+\nu$ のポアソン分布である。したがって $W=n$ が与えられたときの X の条件付確率関数は $n \ge k \ge 0$ のとき

$$f_{X|W=n}(k) = e^{-\nu}\frac{\nu^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!}\Big\{e^{-(\mu+\nu)}\frac{(\mu+\nu)^n}{n!}\Big\}^{-1}$$
$$= {}_nC_k\Big(\frac{\mu}{\mu+\nu}\Big)^k\Big(\frac{\nu}{\mu+\nu}\Big)^{n-k}.$$

$n < k$ または $k < 0$ のときは $f_{X|W=n}(k) = 0$ である。

問題 3. (1) $\varphi_X(t)$ は自由度 k のカイ二乗分布の特性関数であるから, $\mathrm{E}[X^2] < \infty$ である。したがって

$$\mathrm{E}[X] = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}(1-2it)^{-k/2}|_{t=0} = \frac{1}{i}(-\frac{k}{2})(-2i)(1-2it)^{-(k+2)/2}|_{t=0} = k$$
$$\mathrm{E}[X^2] = -\frac{d}{dt^2}(1-2it)^{-k/2}|_{t=0} = k(k+2)(1-2it)^{-(k+4)/2}|_{t=0} = k(k+2)$$
$$\mathrm{Var}X = \mathrm{E}[X^2] - \{\mathrm{E}X\}^2 = 2k$$

(2) $\mathrm{E}Y = \frac{1}{k}\mathrm{E}[X] = 1, \mathrm{Var}[Y] = \frac{1}{k^2}\mathrm{Var}[X] = \frac{2}{k}$. となり, チエビシェフの不等式より 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\mathrm{P}(|Y-1| > \varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{2}{k} \longrightarrow 0 \quad (k \to \infty)$$

問題 4. (1) X_i の分布関数を $F(x)$ とおくと

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x 2tdt = x^2 & (0 \le x \le 1) \\ 0 & (x < 0) \\ 1 & (x > 1) \end{cases}$$

したがって, $X_1, \ldots, X_n$ が独立であることを用いると

$$\mathrm{P}(U_n \leq u) = \mathrm{P}(X_1 \leq u, \ldots, X_n \leq u) = \begin{cases} u^{2n} & (0 \leq u \leq 1) \\ 0 & (u < 0) \\ 1 & (u > 1) \end{cases}$$

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 確率 1 で $U_n \leq 1$ なので

$$\mathrm{P}(|U_n - 1| > \varepsilon) = \mathrm{P}(1 - U_n > \varepsilon) = \mathrm{P}(U_n < 1 - \varepsilon) = \begin{cases} (1-\varepsilon)^{2n} & (\varepsilon < 1) \\ 0 & (\varepsilon \geq 1) \end{cases}$$

したがって $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|U_n - 1| > \varepsilon) = 0$.

(2) 確率 1 で $0 \leq W_n \leq n$ となるので, $w < 0$ のとき $\mathrm{P}(W_n \leq w) = 0$. $w \geq 0$ のとき, 十分大きな n に対して $w < n$ となる。このとき

$$\mathrm{P}(W_n \leq w) = \mathrm{P}(1 - U_n \leq \frac{w}{n}) = \mathrm{P}(1 - \frac{w}{n} \geq U_n) = 1 - \left(1 - \frac{w}{n}\right)^{2n}$$

したがって $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(W_n \leq w) = 1 - e^{-2w}$. 極限分布の確率密度関数を $f_W(w)$ とおくと

$$f_W(w) = \begin{cases} 2e^{-2w} & (w \geq 0) \\ 0 & (w < 0) \end{cases}$$

(3) 中心極限定理より $a = \mathrm{E}[X_i], b = \sqrt{\mathrm{Var}[X_i]}$ ととればよい。

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X_i] &= \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}, \\ \mathrm{E}[X_i^2] &= \int_0^1 2x^3 = \frac{1}{2}, \\ \mathrm{Var}[X_i] &= \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

したがって $a = \frac{2}{3}, b = \frac{\sqrt{2}}{6}$