確率・統計 B　中間試験

2019.10.30

問題 1 $\{X_n\}_{n=1,2,\ldots}$ を確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ 上の確率変数列とする.

(1) $n \to \infty$ のとき $X_n$ が定数 $c$ に確率収束することの定義を書け.

(2) $X$ を $(\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P})$ 上の確率変数とする. $n \to \infty$ のとき $X_n$ が $X$ に分布収束することの定義を書け.

問題 2 ある県では, 住民の 36%が県政に無関心である. この県から無作為に選んだ人が県政に無関心であれば $X = 0$, 県政に関心を持っていれば $X = 1$ とする.

(1) $X$ の母集団分布の分布関数のグラフをを描け.

(2) $X_1, \ldots, X_n$ をこの母集団分布からのランダム標本とし, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ とするとき, $S_n$ の平均と標準偏差を求めよ.

(3) 県の人口は十分に大きいとする. この県から 100 人を無作為に選んだとき, 県政に無関心である人数が 40 人以下になる確率は, 標準正規分布関数 $\Phi$ を用いて $\Phi$(ア) によって近似できる. ア に入る数を答えよ.

問題 3 $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N_2(\mathbf{0}, \Sigma)$ とする. ただし, $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ である.

(1) $Y_1 = cX_2$ とし, $\mathrm{E}\{(X_1 - Y_1)^2\}$ が最小となるような $c$ の値を求めよ.

(2) $\mathrm{E}\{(X_1 - Y_1)^2\}$ が最小であるとき, $X_1 - Y_1$ と $Y_1$ は独立であることを示せ.

問題 4 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を互いに独立に, 次の確率密度関数 $f(x)$ を持つ連続型分布に従う確率変数とし, その順序統計量を $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ とする.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \ 0 < x < 1 \\ 0 & , \ \text{その他} \end{cases}$$

(1) $X_{(n-1)}$ の分布関数と確率密度関数を求めよ.

(2) $X_{(n-1)} \xrightarrow{p} 1 \ (n \to \infty)$ であることを示せ.

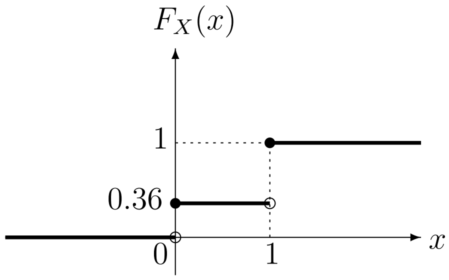
(3) $n \to \infty$ のときの $Z = n(1 - X_{(n-1)})$ 極限分布の分布関数を求めよ.

解答 1 (1) $\forall \varepsilon > 0 \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|X_n - c| \geq \varepsilon) = 0$

($\forall \varepsilon > 0 \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(|X_n - c| > \varepsilon) = 0$ でも良い.)

(2) $F(x), F_n(x)$ を, それぞれ $X, X_n$ の分布関数とするとき, $F$ が $x$ で連続ならば $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$

解答 2 (1) $F_X(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 0.36 & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (x \geq 1) \end{cases}$




(2) $S_n \sim B(n, 0.64)$ であるから $\mathrm{E}[S_n] = 0.64n$, $\sqrt{\mathrm{Var}[S_n]} = 0.48\sqrt{n}$

(3) $\mathrm{P}(S_n \geq 60) = \mathrm{P}(\frac{S_n - 64}{4.8} \geq \frac{60-64}{4.8}) \approx 1 - \Phi(\frac{-5}{6}) = \Phi(\frac{5}{6})$

解答 3 (1) $\mathrm{E}\{(X_1 - Y_1)^2\} = 2 - 2c + c^2$ より $c = 1$

(2) $\mathrm{Cov}[X_1 - X_2, X_2] = \mathrm{Cov}[X_1, X_2] - \mathrm{Var}[X_2] = 1 - 1 = 0$, $(X_1 - X_2, X_2)'$ は 2 次元正規分布に従うから, 独立である.

解答 4 (1) $F(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 1) \\ x & (0 \leq x < 1) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

$$F_{X_{(n-1)}}(y) = nF(y)^{n-1}\{1 - F(y)\} + \{F(y)\}^n = \begin{cases} 1 & (y \geq 1) \\ ny^{n-1}(1-y) + y^n & (0 \leq y < 1) \\ 0 & (y < 0) \end{cases}$$

$$f_{X_{(n-1)}}(y) = \begin{cases} n(n-1)y^{n-2}(1-y) & (0 < y < 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

(2) $\lim_{n\to\infty} F_{X_{(n-1)}}(y) = \begin{cases} 1 & y \geq 1 \\ 0 & y < 1 \end{cases}$

となり, これは 1 に退化した分布の分布関数と一致するので, $X_{(n-1)} \xrightarrow{d} U(1)$. 収束先が退化した分布なので, $X_{(n-1)} \xrightarrow{p} 1$ である.

(3)

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(n(1 - X_{(n-1)}) \leq z) &= \mathrm{P}(X_{(n-1)} \geq 1 - \frac{z}{n}) \\ &= \begin{cases} 1 - 1 & (1 - \frac{z}{n} \geq 1) \\ 1 - n\left(1 - \frac{z}{n}\right)^{n-1}\frac{z}{n} - \left(1 - \frac{z}{n}\right)^n & (0 \leq 1 - \frac{z}{n} < 1) \\ 1 - 0 & (1 - \frac{z}{n} < 0) \end{cases} \\ &\to \begin{cases} 1 - ze^{-z} - e^{-z} & (z > 0) \\ 0 & (z \leq 0) \end{cases} \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$