確率統計基礎講義 A

若木宏文

wakaki@hiroshima-u.ac.jp
http://home.hiroshima-u.ac.jp/ wakaki/lecture/index.shtml

2019.5.8

目次

3.1 カイ 2 乗分布

定義 1

確率密度関数

$$f(y;n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} e^{-y/2} y^{n/2-1} & (y > 0) \\ 0 & (y \leq 0) \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

によって定まる連続型分布を，自由度 n のカイ 2 乗分布といい χ_n^2 と表す.

注意 3.1.1）n は正の実数であっても，連続型分布を定義できる。

注意 3.1.2）$f(y;n)$ は確率密度関数の条件を満たす.

Memo

定義 2

$Z_1, \ldots, Z_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(0,1)$ とし，$Y = \sum_{j=1}^{n} Z_j^2$ とおく。Y の従う分布を自由度 n のカイ 2 乗分布といい，$Y \sim \chi_n^2$ と表す。

注 3.1.3）こちらの定義を用いる方が多い。

注 3.1.4）Y の確率密度関数は，定義 1 の $f(y;n)$ となる。

注 3.1.5）定義 2 より，$X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ ならば

$$Y = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \sim \chi_n^2$$

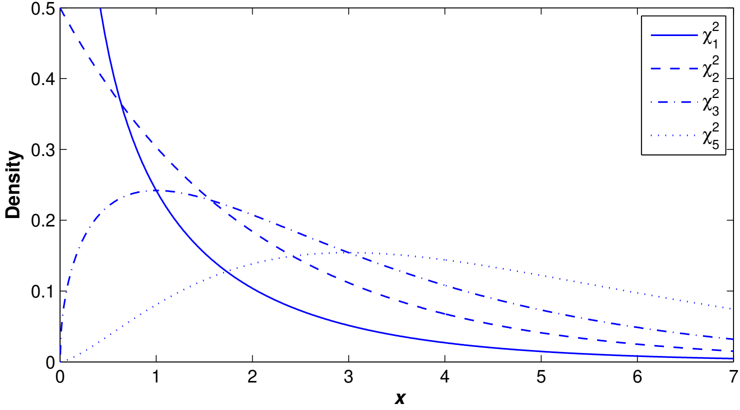
Memo

Memo

Memo

分布の特性

1. 自由度 n のカイ 2 乗分布は右に歪んだ分布であり，n は位置とばらつきの両方に関わる母数である。また，n が大きくなれば正規分布に近づく



分布の特性（続き）

2. $Y \sim \chi^2_n$ の特性関数は

$$\mathcal{C}(t) = (1 - 2it)^{-n/2}$$

3. $Y \sim \chi^2_n$ のとき

$$\mathsf{E}[Y] = n, \ \ \mathsf{Var}[Y] = 2n$$
$$\mu_r = \mathsf{E}[Y^r] = n(n+2)\cdots(\{n+2(r-1)\})$$

4. 逆数のモーメント：$Y\ \chi^2_n,\ (n-2r>0)$ のとき

$$\mathsf{E}[Y^{-r}] = \{(n-2)(n-4)\cdots(n-2r)\}^{-1}$$

5. 再生性： Y_1, Y_2 は独立で, $Y_1\ \chi^2_{n_1}$, $Y_2\ \chi^2_{n_2}$ のとき
   $Y_1 + Y_2 \sim \chi^2_{n_1+n_2}$ となる。

分布の特性（続き）

6. 歪正規分布とカイ 2 乗分布：$X_1, \dots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathsf{SN}(\lambda)$ のとき
$$Y = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 \sim \chi_n^2$$
7. 対数カイ 2 乗分布の平均と分散：$Y \sim \chi_n^2$ のとき，$W = \log Y$ の分布を，対数カイ 2 乗分布という。このとき，
$$\mathsf{E}[W] = \log 2 + \psi(n/2), \quad \mathsf{Var}[W] = \psi^{(1)}(n/2)$$
である。ただし，$\psi(x), \psi^{(1)}(x)$ は
$$\psi(x) = \frac{d}{dx}\log\Gamma(x), \quad \psi^{(1)}(x) = \frac{d}{dx}\psi(x)$$
で定義されるディガンマ関数，トリガンマ関数である。

レポート問題 4

性質 3 と 4 を証明せよ。

Memo

Memo

Memo