

1 経済数学入門 I (2018/04/11) : 文字式の計算

数学を学習する上で文字式の計算は基本になります. ここでは単項式や多項式の積や商について復習します.

1.1 単項式の積・商

定義 1.1. 実数 x に対して, x^n を “ x を n 回かけた数” と定義する.

定義 1.2. 数と文字の積 (かけ算) の形で表される式を 単項式 といい, その数の部分を 係数 という. 単項式は次のルールで書くことにする:

- 数の積は計算した結果を書く (例: $-3 \times 2x = -6x$).
- ただし, 係数が 1 の場合は省略する (例: $-\frac{1}{2} \times 2x = -x$).
- 文字の積はアルファベット順に並べる (例: $-3y \times 2xz = -6xyz$).
- ただし, 同じ文字の積は累乗で表す (例: $-3y \times 2xy = -6xy^2$).

例 1.3. 次が成り立つ.

$$(1) x^2 \times x^3 = (x \cdot x) \times (x \cdot x \cdot x) = x^5.$$

$$(2) (x^2)^3 = (x \cdot x) \times (x \cdot x) \times (x \cdot x) = x^6.$$

$$(3) (-2xy^3)^2 = (-2xy^3) \times (-2xy^3) = 4x^2y^6.$$

$$(4) (-2xy^3)^2 \times (-3x^2y) = (-2xy^3) \times (-2xy^3) \times (-3x^2y) = -12x^4y^7.$$

一般に, 累乗の計算には次の性質 (指数法則) が成り立ちます.

命題 1.4. 自然数 m, n に対して, 次が成り立つ.

$$(1) x^m \times x^n = x^{m+n}$$

$$(2) (x^m)^n = x^{mn}$$

$$(3) (xy)^m = x^m y^m$$

練習問題 1. 次の式を単項式で表せ.

$$(1) x^3 \times x^4 =$$

$$(2) (x^3)^4 =$$

$$(3) -2xy^2 \times (-3x^3y) =$$

$$(4) (-2xy^2)^3 =$$

$$(5) 2x^3y^2 \times (-3xy) \times \frac{1}{6} =$$

$$(6) (-2xy^2)^3 \times \frac{1}{2}x^3z \times (-yz^3)^2 =$$

単項式の商 (分数) を計算する際は、分子と分母で係数や同じ文字どうしを約分します。

例 1.5. 次が成り立つ。

$$(1) \frac{x^5}{x^3} = \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x \cdot x} = x^2.$$

$$(2) \frac{x^3}{x^5} = \frac{x \cdot x \cdot x}{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x^2}.$$

$$(3) \frac{2x^5y}{4x^3y^2} = \frac{2 \times x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \times y}{4 \times x \cdot x \cdot x \times y \cdot y} = \frac{x^2}{2y}.$$

一般に、累乗の商について次の性質が成り立ちます。

命題 1.6. 自然数 m, n に対して、次が成り立つ。

$$(1) m > n \text{ のとき, } \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}, \quad (2) m = n \text{ のとき, } \frac{x^m}{x^n} = 1,$$

$$(3) m < n \text{ のとき, } \frac{x^m}{x^n} = \frac{1}{x^{n-m}}.$$

練習問題 2. 次の式を計算せよ。

$$(1) \frac{x^4}{x^3} =$$

$$(2) \frac{y^2}{y^6} =$$

$$(3) \frac{4x}{x} =$$

$$(4) \frac{x^4y^2}{x^3y^6} =$$

$$(5) \frac{3x^2y^4}{4x^3y^3} =$$

$$(6) \frac{6x^5y^4}{4x^6y^3} =$$

1.2 単項式と多項式の積・商

定義 1.7. 単項式の和・差 (たし算・ひき算) の形で表される式を 多項式 といい, それぞれの単項式を 項 という.

単項式と多項式の積や商を計算する際は, 多項式の項ごとに単項式と計算します.

命題 1.8. L, M, N を単項式とする. このとき, 次が成り立つ.

$$(1) L(M + N) = LM + LN, \quad (2) \frac{M + N}{L} = \frac{M}{L} + \frac{N}{L}.$$

例 1.9. 次が成り立つ.

$$(1) 2x(x^2 - 3y) = 2x \cdot x^2 - 2x \cdot 3y = 2x^3 - 6xy.$$

$$(2) -x(2x^2 - 3x + 1) = (-x) \cdot 2x^2 - (-x) \cdot 3x + (-x) \cdot 1 = -2x^3 + 3x^2 - x.$$

$$(3) \frac{2x^2 - 3x + 1}{x} = \frac{2x^2}{x} - \frac{3x}{x} + \frac{1}{x} = 2x - 3 + \frac{1}{x}.$$

練習問題 3. 次の式を計算せよ.

$$(1) 2x(x^3 - 2x^2y + 3y^2) =$$

$$(2) 3x^2y(x^3 - 2x^2y + 3y^2) =$$

$$(3) -x(x^2 + 4x - 3) =$$

$$(4) -2x^2y(x^2 + 4xy - 3y^2) =$$

$$(5) \frac{x^2 + 4x - 3}{x} =$$

$$(6) \frac{x^3 + 2x^2 - 5}{x} =$$

2 経済数学入門 I (2018/04/18) : 文字式の計算 (続き)

ここでは多項式の和・差や積 (展開), 因数分解について復習します.

2.1 多項式の和・差

まず多項式同士のたし算・ひき算について復習します.

定義 2.1. 多項式において, 文字の部分が同じ項を 同類項 という.

多項式同士のたし算・ひき算は「同類項をまとめる」ことで計算します (逆に言えば, 同類項同士以外は計算しません).

例 2.2. 次の式が成り立つ.

$$(1) (5x - 3y) + (4x + y) = 5x - 3y + 4x + y = (5 + 4)x + (-3 + 1)y = 9x - 2y.$$

$$(2) (5x - 3y) - (4x + y) = 5x - 3y - 4x - y = (5 - 4)x + (-3 - 1)y = x - 4y.$$

$$(3) x(x - 2) + 2(x - 2) = x^2 - 2x + 2x - 4 = x^2 - 4.$$

$$(4) x(x^2 - 2x + 1) - 2(x^2 - 2x + 1) = x^3 - 2x^2 + x - 2x^2 + 4x - 2 = x^3 - 4x^2 + 5x - 2.$$

練習問題 1. 次の式を計算せよ.

$$(1) (6x + 3y) + (2x - 4y) =$$

$$(2) (6x + 3y) - (2x - 4y) =$$

$$(3) 2x - (x^2 + 1) =$$

$$(4) x(4 - x) - (x^2 + 1) =$$

$$(5) x(x - 3) + 2(x - 3) =$$

$$(6) x(x^2 + 3x + 9) - 3(x^2 + 3x + 9) =$$

2.2 多項式の展開

ここでは、多項式同士の積、すなわち展開について復習します。単項式と多項式の積のときと同様に、丁寧に展開する(カッコをはずす)ことで計算します。

命題 2.3. 次が成り立つ。

$$(1) A(M + N) = AM + AN, \quad (A + B)M = AM + BM.$$

$$(2) (A + B)(M + N) = AM + AN + BM + BN.$$

例 2.4. 次が成り立つ。

$$\begin{aligned} (1) (x - 2)(x + 2) &= x(x + 2) - 2(x + 2) \\ &= x^2 + 2x - 2x - 4 \\ &= x^2 - 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) (x - 2)(x^2 - x + 2) &= x(x^2 - x + 2) - 2(x^2 - x + 2) \\ &= x^3 - x^2 + 2x - 2x^2 + 2x - 4 \\ &= x^3 - 3x^2 + 4x - 4. \end{aligned}$$

練習問題 2. 次の式を計算せよ。

$$(1) (x + 2)(x - 3) =$$

$$(2) (x - 2)(x - 3) =$$

$$(3) (x + 4)(x - 4) =$$

$$(4) (x - 2y)(2x + 3y) =$$

$$(5) (x - 4y)^2 =$$

$$(6) (x - 3)(x^2 + 3x + 9) =$$

多項式の展開に関しては、次のような公式が知られています。

命題 2.5. 次が成り立つ。

$$(1) (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab.$$

$$(2) (x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2, \quad (x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2.$$

$$(3) (x+a)(x-a) = x^2 - a^2.$$

2.3 因数分解

展開とは逆に、多項式をいくつかの単項式や多項式の積の形にすることを 因数分解 といいます。基本的な因数分解は次のように「共通因数」を前に出すことで行います。

命題 2.6. $AM + AN = A(M + N)$.

例 2.7. 次が成り立つ。

$$(1) x^2y^3 - 2xy^4 = xy^3 \cdot x - xy^3 \cdot 2y = xy^3(x - 2y).$$

$$(2) 3x^2y^3 - 6xy^4 = 3xy^3 \cdot x - 3xy^3 \cdot 2y = 3xy^3(x - 2y)$$

$$(3) -4x^4y^2 + 6x^2y^3 - 8xy^4 = (-2xy^2) \cdot 2x^3 - (-2xy^2) \cdot 3xy + (-2xy^2) \cdot 4y^2 \\ = -2xy^2(2x^3 - 3xy + 4y^2).$$

練習問題 3. 次の式を因数分解せよ。

$$(1) x^3 - 3x^2y =$$

$$(2) 2xy^2 + 4x^2y =$$

$$(3) -4x^3y + 10x^2y^2 =$$

$$(4) 2x^2y^2 - 6xy^3 + 3xy =$$

$$(5) -3x^4y^2 - 9x^3y^3 + 6x^2y^5 =$$

多項式も共通因数として前に出すことができます。

例 2.8. 次が成り立つ。

$$\begin{aligned}(1) \quad 2x(2x-5)^4 + 8x^2(2x-5)^3 &= 2x(2x-5)^3 \cdot (2x-5) + 2x(2x-5)^3 \cdot 4x \\ &= 2x(2x-5)^3 \{(2x-5) + 4x\} \\ &= 2x(2x-5)^3(6x-5).\end{aligned}$$

注意 2.9. 分かりづらい場合は, $2x-5 = M$ のように別の文字でおいても構いません。

$$\begin{aligned}(1) \quad 2x(2x-5)^4 + 8x^2(2x-5)^3 &= 2xM^4 + 8x^2M^3 \\ &= 2xM^3 \cdot M + 2xM^3 \cdot 4x \\ &= 2xM^3(M + 4x) \\ &= 2x(2x-5)^3 \{(2x-5) + 4x\} \\ &= 2x(2x-5)^3(6x-5).\end{aligned}$$

練習問題 4. 次の式を因数分解せよ。

$$(1) \quad (2x-5)^3 + 6x(2x-5)^2 =$$

$$(2) \quad 2x(2x-5)^2 + 4x^2(2x-5) =$$

$$(3) \quad 3x^2(2x-5)^2 + 4x^3(2x-5) =$$

3 経済数学入門 I (2018/04/25) : 方程式

文字 (未知変数) を含む等式を 方程式 といい, 方程式を満たす未知変数を求めることを 方程式を解く といいます. ここでは, 簡単な方程式とその解き方について説明します.

まず方程式を解くための基本的な操作は 移項 です.

命題 3.1. 次が成り立つ.

$$(1) x - a = b \text{ のとき, } x = b + a$$

$$(2) x + a = b \text{ のとき, } x = b - a$$

$$(3) \frac{x}{a} = b \text{ のとき } x = ab$$

$$(4) a \neq 0, ax = b \text{ のとき } x = \frac{b}{a}$$

3.1 1 次方程式

1 次方程式は移項によって $x = \dots$ という形に式変形することで解くことができます.

例 3.2. 次の方程式を解くと,

$$(1) 2x = 4x + 6$$

$$(2) 2x + 3 = -4x + 6$$

$$[\text{解}] 2x - 4x = 6$$

$$[\text{解}] 2x + 4x = 6 - 3$$

$$-2x = 6$$

$$6x = 3$$

$$x = -3$$

$$x = \frac{1}{2}$$

練習問題 1. 次の方程式を x について解け.

$$(1) 2x - 3 = 5$$

$$(2) 2x - 1 = -3x - 6$$

$$(3) -2x + 3 = 6x + 7$$

$$(4) \frac{1}{2}x = -2x + 10$$

3.2 連立方程式

連立方程式 $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$ を解くための基本的な手順は、次の通りです。

- [1] y を消去した方程式 $f(x) = g(x)$ を解く
- [2] 求めた x を元の式に代入して y を求める

例 3.3. 次の方程式を解くと、

$$(1) \begin{cases} y = 2x & \dots \textcircled{1} \\ y = 4x + 6 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

[解] $2x = 4x + 6$ を解くと、
 $-2x = 6$
 $x = -3$.

① に代入して、 $y = 2 \cdot (-3) = -6$.
よって解は $(x, y) = (-3, -6)$.

$$(2) \begin{cases} y = 2x + 3 & \dots \textcircled{1} \\ y = -4x + 6 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

[解] $2x + 3 = -4x + 6$ を解くと、
 $6x = 3$
 $x = \frac{1}{2}$.

① に代入して、 $y = 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 = 4$.
よって解は $(x, y) = (\frac{1}{2}, 4)$.

練習問題 2. 次の連立方程式を解け.

$$(1) \begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -3x - 6 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2x + y = 3 \\ y = 6x + 7 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \\ 2x + y = 10 \end{cases}$$

3.3 2次方程式

次に2次方程式の解き方について復習します。2次方程式の場合、まず因数分解できるかどうかを考えます。

命題 3.4. $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$.

よって「積 (ab) が定数項、和 $(a+b)$ が x の係数となるような a, b 」が見つければ因数分解できるので、実際にそのような a, b を試行錯誤で見つければよいわけです。

例 3.5. 次のように因数分解できる。

(1) $x^2 + 6x + 8 = (x+2)(x+4)$.

実際、積が8、和が6となるのは、右の表から $a=2, b=4$ のとき。

積 (ab)	和 $(a+b)$
1×8	9
2×4	6

(2) $x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4)$.

実際、積が-8、和が-2となるのは、右の表から $a=2, b=-4$ のとき。

積 (ab)	和 $(a+b)$
$1 \times (-8)$	-7
$8 \times (-1)$	+7
$2 \times (-4)$	-2
$4 \times (-2)$	+2

練習問題 3. 次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2 + 7x + 12$

=

(2) $x^2 - 5x - 6$

=

(3) $x^2 + 2x - 3$

=

(4) $x^2 - 6x + 9$

=

(5) $x^2 - 4$

=

(6) $x^2 - 4x$

=

(7) $2x^2 + 4x - 6$

=

(8) $-x^2 - 5x - 6$

=

因数分解と次の性質を利用すると、2 次方程式を解くことができます。

命題 3.6. $AB = 0$ ならば、 $A = 0$ または $B = 0$.

例 3.7. $x^2 - 2x - 8 = 0$ を解くと、 $(x + 2)(x - 4) = 0$
 $\therefore x + 2 = 0$ または $x - 4 = 0$
 $\therefore x = -2$ または $x = 4$.

注意 3.8. 最後の「 $x = -2$ または $x = 4$ 」は「 $x = -2, 4$ 」と略記することが多いです。

練習問題 4. 次の方程式を解け.

(1) $x^2 + 7x + 12 = 0$

(2) $x^2 - 5x - 6 = 0$

(3) $x^2 + 2x - 3 = 0$

(4) $x^2 - 6x + 9 = 0$

(5) $x^2 - 4 = 0$

(6) $x^2 - 4x = 0$

(7) $2x^2 + 4x - 6 = 0$

(8) $-x^2 - 5x - 6 = 0$

4 経済数学入門 I (2018/05/02) : 一次関数

4.1 一次関数とそのグラフ

$f(x) = ax + b$ (a, b は定数) の形で表される関数を 一次関数 といいます. ここでは, 一次関数の性質について紹介します.

まず一般の関数に対して, 用語を定義します.

定義 4.1. 関数 $f(x)$ に対して,

- (1) $\frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$ を x が h だけ変化したときの 変化の割合 という.
- (2) $f(0)$ を 切片 (正確には y 軸切片) という.

命題 4.2. 一次関数 $f(x) = ax + b$ について,

- (1) 変化の割合は常に a . (これを一次関数の 傾き という.)
- (2) 切片は b .

例 4.3. 次が成り立つ:

- (1) $f(x) = 2x$ の傾きは 2, 切片は 0,
- (2) $f(x) = 5 - \frac{1}{2}x$ の傾きは $-\frac{1}{2}$, 切片は 5.

関数 $f(x)$ に対して, 方程式 $y = f(x)$ を満たす点 (x, y) を図示したものを, 関数の グラフ といいます. 変化の割合 (傾き) や切片は, 関数やグラフを調べる上で重要になります.

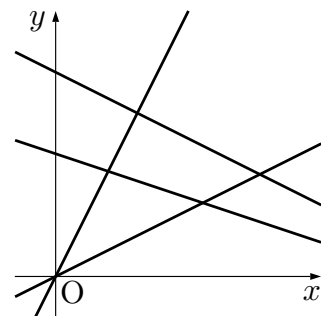
命題 4.4. 一次関数 $f(x) = ax + b$ のグラフは, 点 $(0, b)$ を通り,

- $a > 0$ のとき, 右上がりのグラフ (増加関数)
- $a < 0$ のとき, 右下がりのグラフ (減少関数)

となる.

練習問題 1. 次の一次関数のグラフを右図から選び, 番号で答えよ.

- | | |
|------------------------|-----------------------------|
| (1) $y = 2x$ | (2) $y = -\frac{1}{2}x + 5$ |
| (3) $y = \frac{1}{2}x$ | (4) $y = -\frac{1}{3}x + 3$ |



4.2 2つの一次関数の交点

ここでは, 2つの一次関数のグラフの交点の座標を連立方程式を解くことで求めます.

命題 4.5. 次が成り立つ:

(1) 関数 $y = f(x)$, $y = g(x)$ のグラフの交点の座標は, 連立方程式 $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$ の解.

(2) 特に, 交点の x 座標は, 方程式 $f(x) = g(x)$ の解.

例 4.6. 関数 $y = \frac{1}{2}x$, $y = -x + 3$ のグラフの交点は, 連立方程式 $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ y = -x + 3 \end{cases}$ を解い

て, $(x, y) = (2, 1)$.

練習問題 2. 次の関数のグラフの交点の座標を求めよ.

(1) $y = -x + 6$, $y = 4$

(2) $y = -x + 6$, $y = 2x$

(3) $y = \frac{1}{2}x + 1$, $y = -x + 4$

(4) $y = -x + 3$, $y = \frac{1}{3}x + 1$

4.3 直線で囲まれた領域の面積

ここでは, いくつかの直線で囲まれた領域 (図形) の面積を求めます.

まず, y 軸と 2 つの一次関数 $y = ax + b$ のグラフで囲まれた図形を考えます. この場合, 考える領域は三角形になります.

注意 4.7. 三角形の面積は, 底辺 \times 高さ $\times \frac{1}{2}$ で求めることができました. ここで考える三角形の場合,

- 底辺 = 切片の差,
- 高さ = 交点の x 座標

と考えることができます.

例 4.8. 次が成り立つ:

(1) y 軸と $y = -x + 3$, $y = 1$ のグラフで囲まれた領域の面積 S は,

[1] 2 直線の切片はそれぞれ 3, 1,

[2] 2 直線の交点の x 座標は

$$-x + 3 = 1 \text{ を解いて, } x = 2$$

$$\text{なので, } S = (3 - 1) \times 2 \times \frac{1}{2} = 2.$$

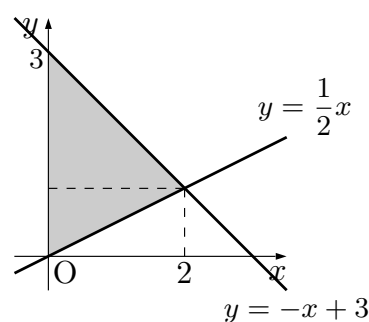
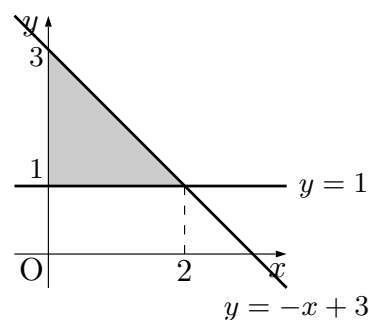
(2) y 軸と $y = -x + 3$, $y = \frac{1}{2}x$ のグラフで囲まれた領域の面積 S は,

[1] 2 直線の切片はそれぞれ 3, 0,

[2] 2 直線の交点の x 座標は

$$-x + 3 = \frac{1}{2}x \text{ を解いて, } x = 2$$

$$\text{なので, } S = (3 - 0) \times 2 \times \frac{1}{2} = 3,$$



練習問題 3. y 軸と次の関数のグラフで囲まれた領域の面積 S を求めよ.

(1) $y = -x + 6$, $y = 4$

(2) $y = -x + 6$, $y = 2x$

(3) $y = \frac{1}{2}x + 1$, $y = -x + 4$

(4) $y = -x + 3$, $y = \frac{1}{3}x + 1$

最後に、 y 軸と 2 つの一次関数のグラフ、そして y 軸に平行な直線 ($x = c$ のグラフ) で囲まれた図形を考えます。この場合、考える領域は台形になります。

注意 4.9. 台形の面積は、(下底 + 上底) \times 高さ $\times \frac{1}{2}$ で求めることができました。ここで考える台形の場合、

- 下底 = “切片の差”,
- 上底 = “ $x = c$ のときの、2 直線の y 座標の差”,
- 高さ = “ c ”

と考えることができます。

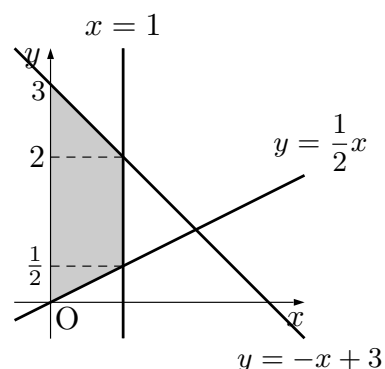
例 4.10. y 軸と $y = \frac{1}{2}x$, $y = -x + 3$, 及び $x = 1$ のグラフで囲まれた領域の面積 S は、

[1] 2 直線の切片はそれぞれ 0, 3,

[2] $x = 1$ のとき、2 直線の y 座標はそれぞれ、

$$y = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}, \quad y = -1 + 3 = 2$$

$$\text{なので、} S = \left\{ (3 - 0) + (2 - \frac{1}{2}) \right\} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4}.$$



練習問題 4. y 軸と次の関数のグラフで囲まれた領域の面積 S を求めよ。

(1) $y = -x + 6$, $y = 2x$, $x = 1$

(2) $y = \frac{1}{2}x + 1$, $y = -x + 4$, $x = 1$

5 経済数学入門 I (2018/05/09) : 需要関数・供給関数

ここでは、需要関数・供給関数を定義し、市場均衡や余剰について調べます。

5.1 需要関数・供給関数

需要とは、消費者が購入しようとする気持ちであり、供給とは、生産者が販売しようとする気持ちです。ここでは、経済学の基礎的事項 (需要・供給と価格の関係) について説明します。特に「価格によって需要量と供給量は決定する」という状況の下で、経済活動を数学的に考えます。

定義 5.1. ある財に関して、

- (1) 需要量 q が価格 p によって決定されるとき、その関係を表す式を 需要関数 といい、 $q = D(p)$ で表す。
- (2) 供給量 q が価格 p によって決定されるとき、その関係を表す式を 供給関数 といい、 $q = S(p)$ で表す。

定義 5.2. 価格 p や需要量・供給量 q はともに 0 以上の値とします。(一般に、経済学で考える変数は 0 以上や 0 より大きい数で考えることが多いです。)

注意 5.3. 通常、価格が増加すると需要量は減少するため、需要関数 $q = D(p)$ は減少関数 (グラフは右下がり) になります。逆に、価格が増加すると供給量は増加するため、供給関数 $q = S(p)$ は増加関数 (グラフは右上がり) になります。

需要関数・供給関数は「価格によって需要量と供給量は決定する」という状況を表しています。逆に、「需要量・供給量によって価格が決定する」という状況を表す関数もあります。

定義 5.4. ある財に関して、

- (1) 需要関数 $q = D(p)$ を $p = (q \text{ の式})$ の形に変形した式を 逆需要関数 といい、 $p = D^{-1}(q)$ で表す。
- (2) 供給関数 $q = S(p)$ を $p = (q \text{ の式})$ の形に変形した式を 逆供給関数 といい、 $p = S^{-1}(q)$ で表す。

例 5.5. 需要関数が $q = 10 - 2p$, 供給関数が $q = 3p$ のとき、

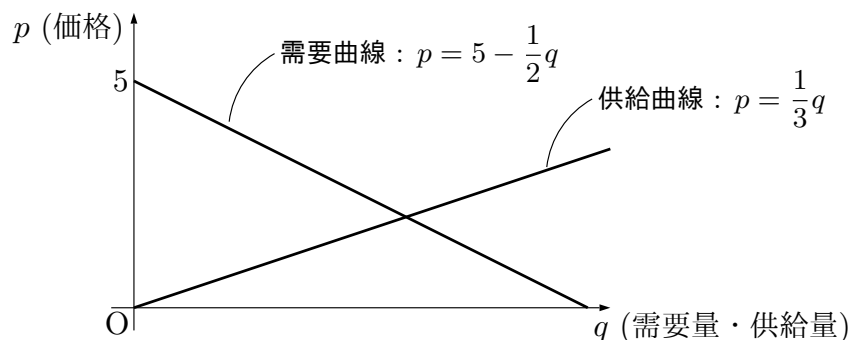
- (1) 逆需要関数は $2p = 10 - q$
 $\therefore p = (10 - q) \times \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2}q.$
- (2) 逆供給関数は $-3p = -q$
 $\therefore p = -q \times \frac{1}{-3} = \frac{1}{3}q.$

5.2 市場均衡

需要関数, 供給関数をグラフで図示したものをそれぞれ 需要曲線, 供給曲線 といいます.
(ただし需要関数・供給関数を単に需要曲線・供給曲線ということもあります.)

注意 5.6. 経済学では「横軸に量 q , 縦軸に価格 p をとった座標」で考えるという習慣のため,
需要曲線・供給曲線を描く際には 逆需要関数・逆供給関数のグラフ を描くことになります.

例 5.7. 例 5.5 (需要関数: $q = 10 - 2p$, 供給関数: $q = 3p$) の需要曲線, 供給曲線は



需要量より供給量の方が多い状態 ($D(p) < S(p)$) を 超過供給 といい, 逆に, 供給量より需要量の方が多い状態 ($D(p) > S(p)$) を 超過需要 といいます. この授業では超過供給・超過需要ならば, 市場の調整機能により,

超過供給でも超過需要でもない状態 = 需要量と供給量が一致する状態

に安定すると考えます.

定義 5.8. 需要量と供給量が一致するときの量と価格との組 (q^*, p^*) を 均衡(点) といい, p^* を 均衡価格, q^* を 均衡取引量 という.*¹

注意 5.9. 数学的にいえば,

均衡 = 「需要曲線と供給曲線の交点」

= 「連立方程式 $q = D(p), q = S(p)$ の解」

です. つまり, 均衡を求めるためには「連立方程式 $q = D(p), q = S(p)$ を解く」ことになります (特に, 均衡価格 p^* とは「方程式 $D(p) = S(p)$ の解」のことです).

例 5.10. 例 5.5 (需要関数: $q = 10 - 2p$, 供給関数: $q = 3p$) において,

(1) 連立方程式 $\begin{cases} q = 10 - 2p \\ q = 3p \end{cases}$ を解くと, $p = 2, q = 6$.

(2) よって, 均衡価格は $p^* = 2$, 均衡取引量は $q^* = 6$ で, 均衡は $(q^*, p^*) = (6, 2)$.

*¹ * は「スター」や「アスタリスク」と読み, その文字が定数であることを意味します.

5.3 余剰

経済活動 (財を購入する, 販売する) によって, 人々 (消費者, 生産者) が得た便益を 余剰 といいます. 特に, ある財を取引した際に, 社会全体での余剰を 総余剰 といい, そのうち, 消費者が得た余剰を 消費者余剰, 生産者が得た余剰を 生産者余剰 といいます. ここでは, これらの余剰を “面積を使って” 定義します.

定義 5.11. ある財について,

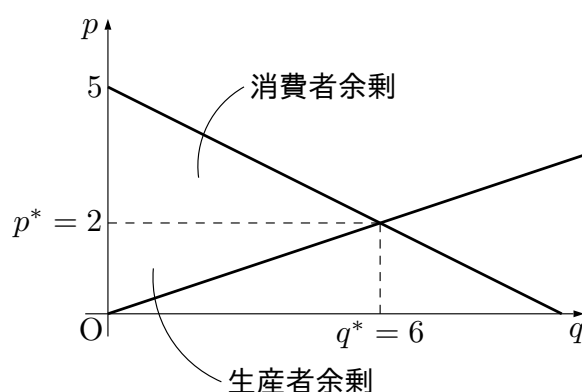
- (1) 需要曲線と「取引価格を高さとする線」の間の面積を 消費者余剰 といい, CS で表す.
- (2) 供給曲線と「取引価格を高さとする線」の間の面積を 生産者余剰 といい, PS で表す.
- (3) 需要曲線と供給曲線の間の面積を 総余剰 といい, TS で表す.

例 5.12. 例 5.5 (需要関数 : $q = 10 - 2p$, 供給関数 : $q = 3p$) において,

- 逆需要関数は $p = -\frac{1}{2}q + 5$, 逆供給関数は $p = \frac{1}{3}q$.
- 均衡は $\begin{cases} q = 10 - 2p \\ q = 3p \end{cases}$ を解いて, $p^* = 2, q^* = 6$.

よって, 均衡価格 p^* で取引されるとき,

- (1) 消費者余剰は $CS = (5 - 2) \times 6 \times \frac{1}{2} = 9$.
- (2) 生産者余剰は $PS = (2 - 0) \times 6 \times \frac{1}{2} = 6$.
- (3) 総余剰は $TS = (5 - 0) \times 6 \times \frac{1}{2} = 15$.



注意 5.13. この場合, 総余剰は消費者余剰と生産者余剰の和 ($TS = CS + PS$) なので, $TS = CS + PS = 9 + 6 = 15$ と求めることもできます.

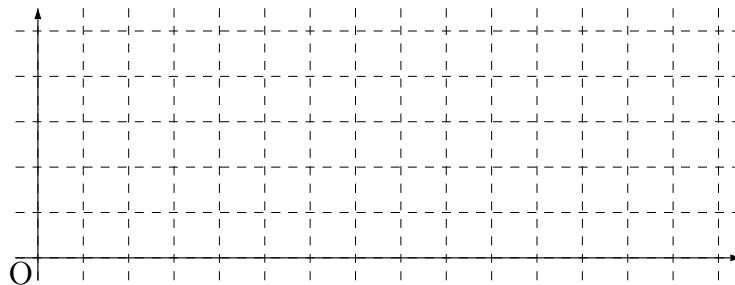
5.4 練習問題

ある財の需要関数が $q = 15 - 3p$, 供給関数が $q = 2p$ で与えられているとする.

(1) 価格が $p = 2$ のときの, 需要量 D と供給量 S を求めよ.

(2) 逆需要関数, 逆供給関数を求めよ (ともに $p = (q \text{ の式})$ の形で表せ).

(3) 需要曲線, 供給曲線を下の座標に図示せよ (適宜, グラフの情報も記入せよ). ただし, 縦軸・横軸ともに 1 目盛りを 1 とする.



(4) 均衡価格 p^* と均衡取引量 q^* を求めよ.

(5) 均衡価格 p^* で取引されるとき, 消費者余剰 CS と生産者余剰 PS を求めよ.

6 経済数学入門 I (2018/05/16) : 余剰分析

前回は均衡価格で取引した場合の余剰について調べました. ここでは, 政府の市場によって均衡価格ではない価格で取引した場合の余剰を調べます (余剰分析). 特に, 「価格が規制された場合」と「生産者に課税された場合」を考えます.

6.1 価格が規制された場合

ここでは, 価格が規制された場合の余剰を求めます.

まず価格が規制された場合の取引量を求めます. 一般に, 均衡価格ではない価格に規制された場合, その価格での需要量と供給量は一致しませんので, 超過需要または超過供給が発生します. その場合, 実際取引される量は需要量と供給量の小さい方となります.

命題 6.1. 均衡価格でない価格 p^{**} で取引される時, 取引量 q^{**} は,

- (1) 超過需要 ($D(p^{**}) > S(p^{**})$) ならば, $q^{**} = S(p^{**})$.
- (2) 超過供給 ($D(p^{**}) < S(p^{**})$) ならば, $q^{**} = D(p^{**})$,

例 6.2. 需要関数が $q = 10 - 2p$, 供給関数が $q = 3p$ で, 取引価格が $p^{**} = 3$ に規制されたとする. このとき,

- 価格 $p^{**} = 3$ のときの需要量は $D = 10 - 2 \cdot 3 = 4$, 供給量は $S = 3 \cdot 3 = 9$.
- よって超過供給 ($D < S$) なので, 取引量は $q^{**} = D = 4$.

では, 価格が規制された場合の余剰を求めます.

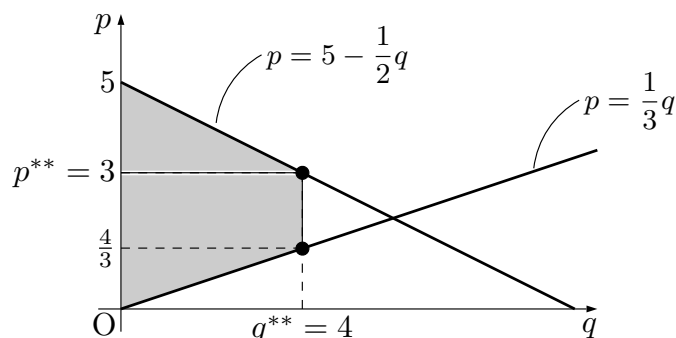
例 6.3. 例 6.2 の設定のもとで,

(1) 消費者余剰は $CS = (5 - 3) \times 4 \times \frac{1}{2} = 4$.

(2) また, 逆供給関数は $p = \frac{1}{3}q$ なので, $q = 4$ のとき $p = \frac{4}{3}$.

よって生産者余剰は $PS = \left\{ (3 - 0) + \left(3 - \frac{4}{3} \right) \right\} \times 4 \times \frac{1}{2} = \frac{28}{3}$.

(3) 総余剰は $TS = \left\{ (5 - 0) + \left(3 - \frac{4}{3} \right) \right\} \times 4 \times \frac{1}{2} = \frac{40}{3}$.



6.2 生産者に課税された場合

ここでは、生産者に「従量税」が課税された場合の余剰を求めます。^{*2}

生産者に課税された場合、供給曲線が変化(シフト)するため、均衡もそれに伴って変化します。そこで、まずは「課税後の供給関数」や「課税後の均衡」を求める必要があります。

命題 6.4. (課税前の) 供給関数を $q = S(p)$ とする。生産者に対して財 1 単位あたり t の従量税が課税されたとき、課税後の供給関数は $q = S(p - t)$ 。(逆供給関数は $p = S^{-1}(q) + t$.)

例 6.5. 需要関数が $q = 10 - 2p$, 供給関数が $q = 3p$ で、生産者に対して財 1 単位あたり $\frac{5}{3}$ の従量税が課税されたとする。このとき、

- 課税後の供給関数は $q = 3\left(p - \frac{5}{3}\right) = 3p - 5$ 。(よって逆供給関数は $p = \frac{1}{3}q + \frac{5}{3}$.)
- 課税後の均衡は $\begin{cases} q = 10 - 2p \\ q = 3p - 5 \end{cases}$ を解いて、 $p = 3, q = 4$ 。よって、課税後の均衡価格は $p^\dagger = 3$, 均衡取引量は $q^\dagger = 4$ 。

では、生産者に課税された場合の余剰を求めます。

生産者に課税された場合、消費者余剰は課税後の価格で考えますが、生産者余剰は課税分を差し引いて考えます。すなわち、

- 消費者余剰 CS は「需要曲線」と「課税後の価格」の間の面積、
- 生産者余剰 PS は「課税前の供給曲線」と「税抜き価格」の間の面積

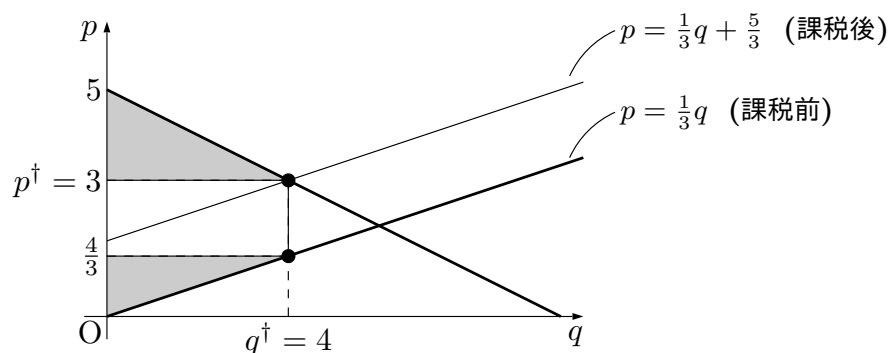
となります。

例 6.6. 例 6.5 の設定のもとで、

(1) 消費者余剰は $CS = (5 - 3) \times 4 \times \frac{1}{2} = 4$ 。

(2) また、逆供給関数は $p = \frac{1}{3}q$ なので、 $q = 4$ のとき $p = \frac{4}{3}$ 。

よって生産者余剰は $PS = \left(\frac{4}{3} - 0\right) \times 4 \times \frac{1}{2} = \frac{8}{3}$ 。



^{*2} 「従量税」とは財の数量を基準にして税率を決めるものです。一方で、消費税などのように財の価格を基準にして税率を決めるものを「従価税」といいます。

6.2 生産者に課税された場合 (補足)

課税を考える場合、「政府」も「税金」という便益を得ることになります。

定義 6.7. 課税によって得られる税金, すなわち,

$$(\text{税込み価格} - \text{税抜き価格}) \times \text{取引量}$$

を 政府余剰 といい, GS で表す.

命題 6.8. 財 1 単位あたり t の従量税が課税されたとき, 課税後の均衡取引量を q^\dagger とすると, 政府余剰 (税金) は $GS = t \times q^\dagger$.

また課税を考える場合, 総余剰は

- 総余剰 $TS = CS + PS + GS$

となります.

例 6.9 (例 6.6 の続き). 例 6.5 の設定のもとで,

(3) 政府余剰 (税金) は $GS = \left(3 - \frac{4}{3}\right) \times 4 = \frac{20}{3}$.

(4) よって, 総余剰は $TS = PS + CS + GS = 4 + \frac{8}{3} + \frac{20}{3} = \frac{40}{3}$.

6.3 死荷重 (発展)

ここまでの例から分かるように, 政府が市場に介入した場合, 総余剰は減少します. その減少分を「死荷重」といいます.

定義 6.10. 政府の介入があった場合の総余剰の減少分, すなわち,

$$(\text{均衡価格で取引した場合の総余剰}) - (\text{介入後の価格で取引した場合の総余剰})$$

を 死荷重 (厚生損失) という.

例 6.11. 需要関数が $q = 10 - 2p$, 供給関数が $q = 3p$ のとき,

(1) 均衡価格で取引した場合, 総余剰は 15 (例 5.12 を参照).

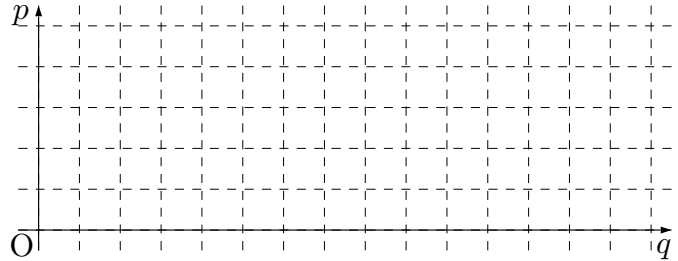
(2) 取引価格が $p^{**} = 3$ に規制された場合, 総余剰は $\frac{40}{3}$ (例 6.3 を参照) なので, 死荷重は $15 - \frac{40}{3} = \frac{5}{3}$.

(3) 生産者に対して財 1 単位あたり $\frac{5}{3}$ の従量税が課税された場合, 総余剰は $\frac{40}{3}$ (例 6.9 を参照) なので, 死荷重は $15 - \frac{40}{3} = \frac{5}{3}$.

6.4 練習問題

ある財の需要関数が $q = 15 - 3p$, 供給関数が $q = 2p$ であるとする.

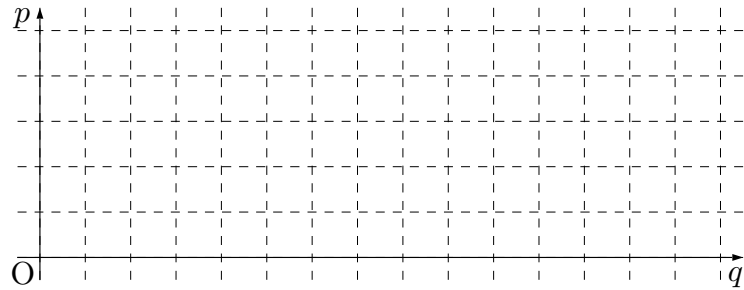
(1) 逆需要関数, 逆供給関数を求めよ. また, 需要曲線, 供給曲線を下の座標に図示せよ.



(2) 取引価格が $p^{**} = \frac{11}{3}$ に規制されたとき, 取引量 q^{**} を求めよ.

(3) (2) のとき, 消費者余剰 CS と生産者余剰 PS を求めよ.

※ 引き続き, 需要関数を $q = 15 - 3p$, 供給関数を $q = 2p$ とします.



(4) 生産者に対して財 1 単位あたり 1 の従量税が課税されたとき, 課税後の供給関数を求めよ. またそのときの均衡価格 p^\dagger , 均衡取引量 q^\dagger を求めよ.

(5) (4) のとき, 消費者余剰 CS と生産者余剰 PS を求めよ.

7 経済数学入門 I (2018/05/23) : 多項式の微分

$f(x) = (n \text{ 次式})$ で表される関数を n 次関数 といいます。ここでは、 n 次関数 (すなわち x の多項式) の微分について定義します。

7.1 微分の定義

ここでは微分を定義し、簡単な関数 (定数関数や一次関数, 累乗で表される関数) の微分について考えます。

定義 7.1. 関数 $y = f(x)$ に対して, $\frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$ の値を, x が h だけ変化したときの 変化の割合 という。

変化の割合とは x の変化量 h と, そのときの $f(x)$ の変化量 $f(x+h) - f(x)$ を比較したもので, ある一定の期間における $f(x)$ の “平均的な” 変化の様子を表したものと いえます。そこでその期間をできるだけ短くする, すなわち変化量 h を限りなく 0 に近づくことで, $f(x)$ の “瞬間的な” 変化の様子を表すものを考えることができます。

定義 7.2. 関数 $y = f(x)$ に対して, 変化量 h を限りなく 0 に近づけたときの変化の割合 $\frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$ の値を, 微分 (あるいは 導関数) といい, $f'(x)$ と表す。*3

定数関数 $f(x) = a$ や 一次関数 $f(x) = ax + b$ については, それぞれ変化の割合が一定 (x によらない) ため, それらの傾きがそのまま微分になります。

命題 7.3. 次が成り立つ :

- (1) 定数関数 $f(x) = a$ のとき $f'(x) = 0$. すなわち, $(a)' = 0$.
- (2) 1 次関数 $f(x) = ax + b$ のとき $f'(x) = a$. すなわち, $(ax + b)' = a$.

練習問題 1. 次の微分 (傾き) を求めよ。

(1) $(2x - 1)' =$

(2) $\left(-\frac{1}{3}x + 4\right)' =$

(3) $(-x + 2)' =$

(4) $\left(-\frac{1}{3}\right)' =$

*3 「限りなく 0 に近づける」というのは直感的な言い方で, 数学的には 極限 というものを使って, 次のように

定義されます: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$.

一般に累乗で表される関数 $f(x) = x^n$ については、二項定理から

$$f(x+h) = (x+h)^n = x^n + nx^{n-1} \times h + (x \text{ と } h \text{ の式}) \times h^2$$

が成り立つので、これを利用して微分を求めることができます。

命題 7.4. $f(x) = x^n$ の微分は $f'(x) = nx^{n-1}$. 特に,

- (1) $f(x) = x^2$ の微分は $f'(x) = 2x$,
- (2) $f(x) = x^3$ の微分は $f'(x) = 3x^2$,
- (3) $f(x) = x^4$ の微分は $f'(x) = 4x^3$.

7.2 多項式の微分

ここでは微分の公式を用いて、単項式や多項式の微分を求めます。
微分については、次の公式が成り立ちます。

命題 7.5. 関数 $f(x)$, $g(x)$ と定数 a に対して、次が成り立つ:

- (1) $(a \times f(x))' = a \times f'(x)$,
- (2) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

(1) を利用すると、単項式の微分を求めることができます。

命題 7.6. 定数 a に対して、次が成り立つ: $(ax^n)' = anx^{n-1}$.

例 7.7. 次が成り立つ:

- (1) $(3x^2)' = 3 \times (x^2)' = 3 \times 2x = 6x$.
- (2) $\left(-\frac{1}{6}x^3\right)' = -\frac{1}{6} \times (x^3)' = -\frac{1}{6} \times 3x^2 = -\frac{1}{2}x^2$.

練習問題 2. 次の微分を求めよ。

$$(1) (2x^2)' = \qquad (2) \left(-\frac{1}{3}x^2\right)' =$$

$$(3) (2x^3)' = \qquad (4) \left(-\frac{1}{4}x^4\right)' =$$

$$(5) (2x^5)' = \qquad (6) \left(-\frac{2}{3}x^6\right)' =$$

7.2 多項式の微分 (続き)

一般の多項式については, (1), (2) を利用して各項ごとに微分を計算します.

例 7.8. 次が成り立つ:

(1) $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$ のとき, $f'(x) = 6x - 6$.

(2) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 6$ のとき, $f'(x) = -x^2 + 4x$.

練習問題 3. 次の関数 $f(x)$ について, 微分 $f'(x)$ を求めよ.

(1) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

$$f'(x) =$$

(2) $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$

(3) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$

(4) $f(x) = -x^2 + 4$

(5) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 6$

(6) $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 5$

7.3 微分係数

ここでは、関数 $f(x)$ に対して、その微分係数を求めます。

定義 7.9. 関数 $f(x)$ に対して、微分 $f'(x)$ に $x = a$ を代入した値を $x = a$ における 微分係数 といい、 $f'(a)$ と表す。

例 7.10. 次が成り立つ:

(1) $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$ のとき、 $f'(x) = 6x - 6$ なので、 $f'(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0$.

(2) $f(x) = -2x + 3$ のとき、 $f'(x) = -2$ なので、 $f'(1) = -2$.

練習問題 4. 次の関数 $f(x)$ について、 $x = 2$ における微分係数 $f'(2)$ を求めよ。

(1) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

(2) $f(x) = 2x^2 - 2x + 1$

(3) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 6$

(4) $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 5$

(5) $f(x) = 2x - 1$

(6) $f(x) = -\frac{1}{3}$

9 経済数学入門 I (2018/06/13) : 関数の極大・極小

ここでは、微分を用いて関数の極大・極小を調べます。

9.1 停留点

ここでは、関数の停留点を定義し、それらを求めます。

定義 9.1. 関数 $f(x)$ に対して、 $f'(x) = 0$ を満たす x を $f(x)$ の 停留点 という。

言い換えると、停留点とは「方程式 $f'(x) = 0$ の解」のことです。

例 9.2. 次の通り。

(1) $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$ の停留点は、 $f'(x) = 6x - 6 = 0$ を解いて、 $x = 1$ 。

(2) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 6$ の停留点は、 $f'(x) = -x^2 + 4x = 0$ を解いて、 $x = 0, 4$ 。

(3) $f(x) = -2x + 3$ の停留点は、 $f'(x) = -2 \neq 0$ なので存在しない。

練習問題 1. 次の関数 $f(x)$ に対して、停留点を求めよ。

(1) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

(2) $f(x) = -x^2 + 4$

(3) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$

(4) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5$

9.2 2階微分と2階微分係数

ここでは、関数の2階微分と2階微分係数を定義し、それらを求めます。

定義 9.3. 関数 $f(x)$ に対して,

- $f(x)$ を 2 回微分したもの ($f'(x)$ を微分したもの) を $f(x)$ の 2 階微分 といい, $f''(x)$ と表す.
- 2 階微分 $f''(x)$ に $x = a$ を代入した値を $x = a$ における 2 階微分係数 といい, $f''(a)$ と表す.

注意 9.4. 同様に, $f(x)$ を n 回微分したものを n 階微分 といい, それに $x = a$ を代入した値を n 階微分係数 といいます. 一般の場合や階数が大きくなった場合には, それぞれを $f^{(n)}(x)$, $f^{(n)}(a)$ と表します.

例 9.5. 次が成り立つ.

(1) $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$ のとき, $f'(x) = 6x - 6$ なので,

- 2 階微分は $f''(x) = 6$.
- $x = 1$ における 2 階微分係数は $f''(1) = 6$.

(2) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 6$ のとき, $f'(x) = -x^2 + 4x$ なので,

- 2 階微分は $f''(x) = -2x + 4$.
- $x = 1$ における 2 階微分係数は $f''(1) = 2$.

練習問題 2. 次の関数 $f(x)$ に対して, 2 階微分 $f''(x)$ を求めよ. また, $x = 3$ における 2 階微分係数 $f''(3)$ を求めよ.

(1) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

(2) $f(x) = -x^2 + 4$

(3) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$

(4) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5$

9.3 関数の増減と微分

ここでは、関数の増減を定義し、微分を用いて関数の増減を調べます。

定義 9.6. 関数 $f(x)$ が

- (1) 増加 しているとは、 $a < b$ のとき $f(a) < f(b)$ であること、
- (2) 減少 しているとは、 $a < b$ のとき $f(a) > f(b)$ であること。

関数の増減と微分 (微分係数) には次の関係があります。

命題 9.7. 関数 $f(x)$ に対して、

- (1) $f'(a) > 0$ ならば、 $f(x)$ は $x = a$ の周りで増加する。
- (2) $f'(a) < 0$ ならば、 $f(x)$ は $x = a$ の周りで減少する。

注意 9.8. $f'(a) = 0$ の場合は、これだけでは増減を判定できません。

例 9.9. 次が成り立つ。

- (1) $f(x) = -2x + 3$ のとき、 $f'(x) = -2$ なので、
 - $x = 1$ における微分係数は $f'(1) = -2 < 0$.
 - よって、 $f(x)$ は $x = 1$ の周りで減少する。
- (2) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 6$ のとき、 $f'(x) = -x^2 + 4x$ なので、
 - $x = 1$ における微分係数は $f'(1) = 3 > 0$.
 - よって、 $f(x)$ は $x = 1$ の周りで増加する。
- (3) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$ のとき、 $f'(x) = x^2 - 2x + 1$ なので、
 - $x = 1$ における微分係数は $f'(1) = 0$.
 - よってこれだけでは増減を判定できない (実際には増加しています)。

9.4 関数の極大・極小と微分

ここでは、関数の極大・極小を定義し、微分を用いて関数の極大・極小を調べます。

定義 9.10. 関数 $f(x)$ に対して、

- (1) $x = a$ で 極大 であるとは、 $x = a$ の周りで $f(a)$ が最大であること、
- (2) $x = a$ で 極小 であるとは、 $x = a$ の周りで $f(a)$ が最小であること。

注意 9.11. 極大・極小となる点は 1 つとは限りませんし、存在しない場合もあります。

関数のグラフを山道に例えると、「極大」は山の頂上、「極小」は山の谷底に相当します。山登りをしていて、上り坂から下り坂になる瞬間が「極大」で、下り坂から上り坂になる瞬間

が「極小」です。

関数の極大・極小と微分には次の関係があります。

定理 9.12. 関数 $f(x)$ が $x = a$ で極大または極小ならば、 $f'(a) = 0$ ($x = a$ は $f(x)$ の停留点)

よって、極大・極小を調べるためには、まずは方程式 $f'(x) = 0$ を解く (停留点を求める) ことになります。しかし、これだけでは「極大・極小のどちらになるのか」も分かりませんし、またそもそも極大・極小にならない可能性もあります。(つまり、停留点は「極大・極小となる点の候補」に過ぎないわけです。)

そこで極大・極小を判定するために、2階微分係数 (の正負) を利用します。

定理 9.13. 関数 $f(x)$ に対して、

(1) $f'(a) = 0$ かつ $f''(a) < 0$ ならば、 $f(x)$ は $x = a$ で極大。

(2) $f'(a) = 0$ かつ $f''(a) > 0$ ならば、 $f(x)$ は $x = a$ で極小。

よって、関数の極大・極小を調べる手順は

[1] 極大・極小となる点の候補を探す: $f'(x)$ を求め、 $f'(x) = 0$ の解 $x = a$ を求める。

[2] その点で極大・極小になるかを判定する: $f''(x)$ を求め、 $f''(a)$ の正負を調べる。

となります。

注意 9.14. $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ の場合は、これだけでは極大・極小を判定できません。

例 9.15. 次が成り立つ。

(1) $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$ のとき、

[1] $f'(x) = 6x - 6 = 0$ を解いて、 $x = 1$ 。

[2] $f''(x) = 6$ なので、

• $x = 1$ のとき、 $f''(1) = 6 > 0$ 。よって $f(x)$ は $x = 1$ で極小。

(2) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 6$ のとき、

[1] $f'(x) = -x^2 + 4x = 0$ を解いて、 $x = 0, 4$ 。

[2] $f''(x) = -2x + 4$ なので、

• $x = 0$ のとき、 $f''(0) = 4 > 0$ 。よって $f(x)$ は $x = 0$ で極小。

• $x = 4$ のとき、 $f''(4) = -4 < 0$ 。よって $f(x)$ は $x = 4$ で極大。

(3) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$ のとき、

[1] $f'(x) = x^2 - 2x + 1 = 0$ を解いて、 $x = 1$ 。

[2] $f''(x) = 2x - 2$ なので、

• $x = 1$ のとき、 $f''(1) = 0$ 。よってこれだけでは極大・極小を判定できない (実際には極大でも極小でもありません)。

練習問題 3. 次の関数 $f(x)$ に対して, 極大・極小を調べよ.

(1) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

(2) $f(x) = -x^2 + 4$

(3) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$

(4) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5$

10 経済数学入門 I (2018/06/20) : 最適化問題

ここでは、関数 $f(x)$ に対して、 $f(x)$ が最大・最小となるときの x の値や、そのときの最大値・最小値を求めます。これを「最適化問題」といいます。

10.1 関数の極大値・極小値

定義 10.1. 関数 $f(x)$ に対して、

- (1) 点 $x = a$ で極大であるとき、 $f(a)$ を 極大値、
- (2) 点 $x = a$ で極小であるとき、 $f(a)$ を 極小値

という。

よって、極大値・極小値を調べる手順は

- [1] 極大・極小となる点の候補を探す: $f'(x)$ を求め、 $f'(x) = 0$ の解 $x = a$ を求める。
- [2] その点で極大・極小になるかを判定する: $f''(x)$ を求め、 $f''(a)$ の正負を調べる。
- [3] 極大値・極小値を求める: $x = a$ のときの値 $f(a)$ を求める。

となります (前回の「極大・極小を調べる手順」に [3] が増えただけです)。

例 10.2. 次が成り立つ。

- (1) $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$ のとき、

[1] $f'(x) = 6x - 6 = 0$ を解いて、 $x = 1$ 。

[2] $f''(x) = 6$ なので、

- $f''(1) = 6 > 0$. よって $x = 1$ のとき極小。

[3] よって、

- 極小値は $f(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 1 = -2$.
- 極大値は存在しない。*4

- (2) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 6$ のとき、

[1] $f'(x) = x^2 - 4x = 0$ を解いて、 $x = 0, 4$ 。

[2] $f''(x) = 2x - 4$ なので、

- $f''(0) = -4 < 0$. よって $x = 0$ のとき極大。
- $f''(4) = 4 > 0$. よって $x = 4$ のとき極小。

[3] よって、

- 極大値は $f(0) = \frac{1}{3} \cdot 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 6 = 6$.

- 極小値は $f(4) = \frac{1}{3} \cdot 4^3 - 2 \cdot 4^2 + 6 = -\frac{14}{3}$.

*4 この場合、極大・極小の候補であった $x = 1$ が極小なので、極大となる x は存在しないことになります。

練習問題 1. 次の関数 $f(x)$ に対して, 極大値を求めよ (存在しない場合は「なし」と答えよ).

(1) $f(x) = x^2 - 6x + 7$

(2) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - 3$

(3) $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 2x + \frac{5}{3}$

10.2 関数の最大値・最小値

ここでは関数 $f(x)$ に対して、その最大値・最小値を求めます。

定義 10.3. 関数 $f(x)$ の定義域が $a \leq x \leq b$ や $x \geq 0$ のように制限されている場合、

- (1) $x = a, b$ や $x = 0$ のような点を定義域の 端点、端点全体を定義域の 境界 という、
- (2) 端点以外の点を定義域の 内点、内点全体を定義域の 内部 という。

定理 10.4. 関数 $f(x)$ に対して、

- (1) $x = a$ で最大ならば、 $x = a$ で極大、または $x = a$ は定義域の端点。
- (2) $x = a$ で最小ならば、 $x = a$ で極小、または $x = a$ は定義域の端点。

よって 最大値が存在するならば、それは「極大値」か「端点での値」のどちらかになります。^{*5} そこでこの授業では、関数の最大値を次の手順で求めることにします (最小値も同様):

- [1] 「極大値」と「端点での値」を求める。
- [2] [1] で求めた値を比較して、最大値を求める。

例 10.5. 次が成り立つ。

(1) $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$ ($0 \leq x \leq 3$) のとき、

[1-1] $f'(x) = 6x - 6 = 0$ を解いて、 $x = 1$ 。

$f''(x) = 6$ なので、

- $f''(1) = 6 > 0$. よって $x = 1$ のとき極小。

以上より、極大値は存在しない。

[1-2] 定義域の端点は $x = 0, 3$ なので、そのときの値は

- $x = 0$ のとき、 $f(0) = 1$.
- $x = 3$ のとき、 $f(3) = 10$.

[2] よって $f(0) < f(3)$ なので、最大値は $f(3) = 10$ 。

(2) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 6$ ($-1 \leq x \leq 3$) のとき、

[1-1] $f'(x) = x^2 - 4x = 0$ を解いて、 $x = 0$. (定義域の条件から $x = 4$ は不適)

$f''(x) = 2x - 4$ なので、

- $f''(0) = -4 < 0$. よって $x = 0$ のとき極大。

以上より、極大値は $f(0) = 6$ 。

[1-2] 定義域の端点は $x = 3, -1$ なので、そのときの値は

- $x = 3$ のとき、 $f(3) = -3$.
- $x = -1$ のとき、 $f(-1) = \frac{11}{3}$.

[2] よって $f(3), f(-1) < f(0)$ なので、最大値は $f(0) = 6$ 。

*5 実は「最大値が存在することを確認する」のが数学的には重要かつ難しいところです。

練習問題 2. 次の関数 $f(x)$ に対して, 最大値を求めよ. (存在しない場合は「なし」と答えよ).

$$(1) f(x) = x^2 - 6x + 7 \quad (0 \leq x \leq 4)$$

$$(2) f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - 3 \quad (-3 \leq x \leq 3)$$

$$(3) f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 2x + \frac{5}{3} \quad (x \geq 0)$$

11 経済数学入門 I (2018/06/27) : 費用関数と利潤

ここでは, 生産量 (取引量) を x とし, x に関する費用関数や収入, 利潤を定義して, それらを求めます.

11.1 費用関数

ここでは, 費用関数と, その固定費用と可変費用を定義します.

定義 11.1. 生産量 x に対してそれを生産するための総費用 (機会費用も含む) を表す関数を 費用関数 (cost function) といい, $C(x)$ と表す.

例 11.2. 費用関数を $C(x) = x^2 + 2x + 3$ とすると, $x = 2$ のときにかかる費用は $C(2) = 11$.

費用には, 生産量に応じて変化する費用と, 生産しなくてもかかる費用とがありますので, それらを区別して考えます.

定義 11.3. 費用関数 $C(x)$ に対して,

- (1) $FC = C(0)$ を 固定費用 (fixed cost) という,
- (2) $VC(x) = C(x) - FC$ を 可変費用 (variable cost) という. *6

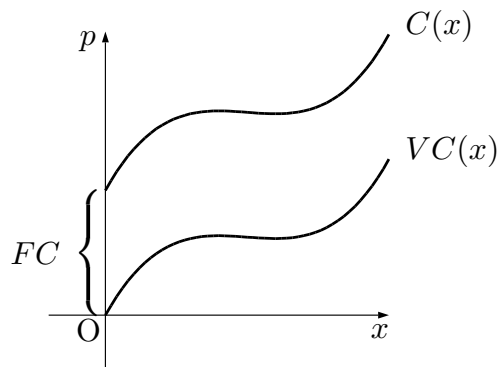
例 11.4. 費用関数が $C(x) = x^2 + 2x + 1$ のとき,

- (1) 固定費用は $FC = 1$.
- (2) 可変費用は $VC(x) = x^2 + 2x$ であり, $x = 2$ のとき $VC(2) = 8$.

命題 11.5. 費用関数に対して, $C(x) = VC(x) + FC$ が成り立つ.

注意 11.6. 費用関数 $C(x)$ が x の多項式で表されるとき, 固定費用 FC はその定数項, 可変費用 $VC(x)$ はそれ以外の項の和になります.

費用関数 $C(x)$ をグラフとして図示したとき, 固定費用 FC とは「切片の値」であり, 可変費用 $VC(x)$ のグラフは費用関数のグラフを固定費用の分だけ下に平行移動したものになります.



6 本来は, x によって変わる関数なので「可変費用関数」と呼び, 特に $x = x^$ を代入した値を「可変費用」と呼ぶべきですが, 特に区別しないことにします. これ以降の用語についても同様です.

11.2 平均費用と限界費用

ここでは、各費用関数の「平均」と「限界」を定義します。ちなみに、経済学では「限界 (marginal)」がつくと「微分」を意味します。

まず平均費用を定義します。平均費用とは「生産量 1 単位あたりにかかる必要な費用」のことです。

定義 11.7. 費用を生産量で割った 1 単位あたりの平均を 平均費用 という。すなわち、

(1) $AC(x) = \frac{C(x)}{x}$ を 平均費用 (average cost) という。

(2) $AVC(x) = \frac{VC(x)}{x}$ を 平均可変費用 (average variable cost) という。

(3) $AFC(x) = \frac{FC}{x}$ を 平均固定費用 (average fixed cost) という。

例 11.8. 費用関数が $C(x) = x^2 + 2x + 1$ のとき、

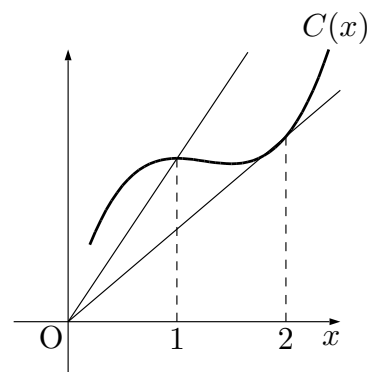
(1) 平均費用は $AC(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = x + 2 + \frac{1}{x}$ であり、 $x = 2$ のとき $AC(2) = \frac{9}{2}$ 。

(2) 平均可変費用は $AVC(x) = \frac{x^2 + 2x}{x} = x + 2$ であり、 $x = 2$ のとき $AVC(2) = 4$ 。

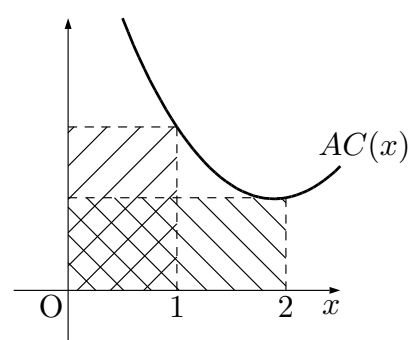
(3) 平均固定費用は $AFC(x) = \frac{1}{x}$ であり、 $x = 2$ のとき $AFC(2) = \frac{1}{2}$ 。

命題 11.9. 平均費用関数に対して、 $AC(x) = AVC(x) + AFC(x)$ が成り立つ。

費用関数 $C(x)$ のグラフに対して、平均費用は $AC(x) = \frac{C(x) - 0}{x - 0}$ なので、「原点 $(0, 0)$ と点 $(x, C(x))$ を結ぶ直線の傾き」を表します。右図の場合、 $x = 1$ と $x = 2$ では $x = 2$ のときの方が傾きが小さいため、平均費用も小さいことが分かります。



逆に、平均関数 $AC(x)$ のグラフに対して、費用関数は $C(x) = x \times AC(x)$ なので、「原点 $(0, 0)$ と点 $(x, AC(x))$ を頂点にもつ長方形の面積」を表します。右図の場合、 $x = 1$ と $x = 2$ では $x = 2$ のときの方が面積が大きいため、費用も大きいことが分かります。



11.2 平均費用と限界費用 (続き)

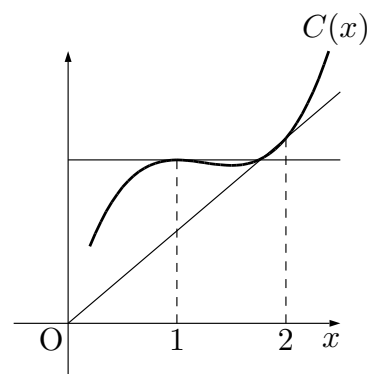
次に限界費用を定義します。限界費用とは、標語的には「生産量が x のときに、生産量を 1 単位増加させたときに必要な費用」になります。

定義 11.10. 費用関数を生産量 x で微分した $C'(x)$ を 限界費用 (marginal cost) といい、 $MC(x)$ と表す。*7

例 11.11. 費用関数が $C(x) = x^2 + 2x + 1$ のとき、

(1) 限界費用は $MC(x) = 2x + 2$ であり、 $x = 2$ のとき $MC(2) = 6$ 。

費用関数 $C(x)$ のグラフに対して、限界費用は「点 $(x, C(x))$ における“接線”の傾き」を表します。右図の場合、 $x = 2$ のときの接線は原点 $(0, 0)$ も通っています。原点と点 $(x, C(x))$ を通る直線の傾きは平均費用のことですので、これは $x = 2$ のときに限界費用と平均費用が一致することを意味します。

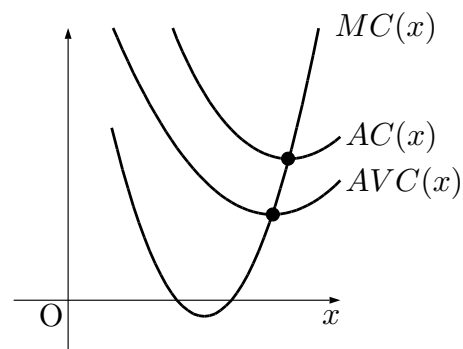


実際、「平均費用」及び「平均可変費用」と「限界費用」には次の関係があります。

命題 11.12. 次が成り立つ。

- (1) 平均費用 $AC(x)$ が内点 $x = x^*$ で最小となるならば、 $AC(x^*) = MC(x^*)$ 。
- (2) 平均可変費用 $AVC(x)$ が内点 $x = x^{**}$ で最小となるならば、 $AVC(x^{**}) = MC(x^{**})$ 。

実際、右図では平均費用、平均可変費用がそれぞれ最小となる点を、ともに限界費用のグラフが通っています。ちなみに、これらの点は順に 損益分岐点、操業停止点 と呼ばれます (その意味については説明を割愛します)。



11.3 収入と利潤

ここでは、生産量 x であるときの収入 (売上) と利潤を求めます。

まず収入 $R(x)$ を定義します。収入は、いくらのお金をどれだけの量で取引したかで決定します。

*7 同様に、限界可変費用と限界固定費用も定義できますが、それぞれ $MVC(x) = MC(x)$, $MFC(x) = 0$ となるため、あえて定義する必要がありません。

定義 11.13. (価格) × (生産量) を 収入 (revenue) といい、生産量 x に対して、 $R(x)$ と表す。また、収入 $R(x)$ を x で微分した $R'(x)$ を 限界収入 (marginal revenue) といい、 $MR(x)$ と表す。

例 11.14. 次が成り立つ。

- (1) 価格が $p = 4$ のとき、収入は $R(x) = 4x$ 、限界収入は $MR(x) = 4$ 。
- (2) 価格が $p = 6 - x$ のとき、収入は $R(x) = 6x - x^2$ 、限界収入は $MR(x) = 6 - 2x$ 。

命題 11.15. 次が成り立つ。

- (1) 価格が p (定数) のとき、限界収入は $MR(x) = p$ 。
- (2) 価格が $p(x)$ (x の関数) のとき、限界収入は $MR(x) = p'(x)x + p(x)$ 。

次に利潤 $\pi(x)$ を定義します。利潤は収入から費用を引いたものになります。

定義 11.16. (収入) - (費用) を 利潤 (profit) といい、生産量 x に対して、 $\pi(x)$ と表す。^{*8}

すなわち、 $\pi(x) = R(x) - C(x)$ です。

例 11.17. 費用関数を $C(x) = x^2 + 2x + 1$ とする。

- (1) 価格が $p = 4$ のとき、利潤は $\pi(x) = 4x - (x^2 + 2x + 1) = -x^2 + 2x - 1$ 。
- (2) 価格が $p = 6 - x$ のとき、利潤は $\pi(x) = (6 - x)x - (x^2 + 2x + 1) = -2x^2 + 4x - 1$ 。

11.4 利潤最大化の一階条件

ここでは、利潤最大化の一階条件を紹介し、それを満たす生産量 x を求めます。

定理 11.18 (利潤最大化の一階条件). 利潤 $\pi(x)$ が内点 $x = x^*$ で最大となるならば、 $\pi'(x^*) = 0$ 。

注意 11.19. 利潤は $\pi(x) = R(x) - C(x)$ なので、 $\pi'(x) = 0$ は $MR(x) = MC(x)$ と言い換えることができます。そのため、 $MR = MC$ を利潤最大化の一階条件と呼ぶこともあります。

例 11.20. 費用関数を $C(x) = x^2 + 2x + 1$ とするとき、次が成り立つ。

- (1) 価格が $p = 4$ のとき、利潤は $\pi(x) = -x^2 + 2x - 1$ 。
よって、利潤最大化の一階条件 $\pi'(x) = 0$ を満たす x は
 $\pi'(x) = -2x + 2 = 0$ を解いて、 $x = 1$ 。(そのときの利潤は $\pi(1) = 0$ 。)
- (2) 価格が $p = 6 - x$ のとき、利潤は $\pi(x) = -2x^2 + 4x - 1$ 。
よって、利潤最大化の一階条件 $\pi'(x) = 0$ を満たす x は
 $\pi'(x) = -4x + 4 = 0$ を解いて、 $x = 1$ 。(そのときの利潤は $\pi(1) = 1$ 。)

^{*8} p は「価格 (price)」を表す記号として使っているため、 p に対応するギリシャ文字 π を使うことにします。人によっては、 $P(x)$ のように大文字を使うこともあります。

11.5 練習問題

ある企業の費用関数を $C(x) = x^2 + 4x + 5$ (x は生産量) とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) 固定費用 FC , 可変費用 $VC(x)$ をそれぞれ求めよ. また, $x = 2$ のときの可変費用 $VC(2)$ を求めよ.

(2) 平均費用 $AC(x)$, 平均可変費用 $AVC(x)$ をそれぞれ求めよ. また, $x = 2$ のときの平均可変費用 $AVC(2)$ を求めよ.

(3) 限界費用 $MC(x)$ を求めよ. また, $x = 2$ のときの限界費用 $MC(2)$ を求めよ.

(4) 生産量 x に対して, 価格が $p = 12 - x$ となるとき, 利潤 $\pi(x)$ を求めよ.

(5) (4) のとき, 利潤最大化の一階条件 $\pi'(x) = 0$ (または $MR = MC$) を満たす x を求めよ. また, そのときの利潤を求めよ.

12 経済数学入門 I (2018/07/04) : 利潤の最大化

ここでは、前回に引き続き「利潤の最大化」を考えます。特に、企業が「独占企業」や「プライス・テイカー」の場合に、利潤を最大化する（最適な）生産量を求めます。

以下、生産量 x は $x \geq 0$ の範囲で考え、また利潤を最大にする $x = x^*$ はその内点であるとして、次が成り立ちます。

命題 12.1. 利潤 $\pi(x)$ が $x = x^*$ のとき最大になるならば、 $\pi'(x^*) = 0$, $\pi''(x^*) < 0$.

12.1 企業が独占企業の場合

ここでは、ある財を1つの企業が独占的に供給している場合を考えます。その場合、消費者はこの企業から購入するしかいないため、次が成り立ちます。

命題 12.2. ある財を1つの企業が独占しているとき、消費者の需要量 $q =$ 企業が生産量 x .

よって、財の価格は企業が生産量から決まります。

例 12.3. ある財の需要関数が $q = 8 - p$, その財を生産する企業の費用関数が $C(x) = x^2 + 1$ であるとする。この企業がこの財を独占的に生産するとき、利潤を最大にする生産量 x^* を求める。

- (1) 独占企業の仮定から $q = x$. よって、 $x = 8 - p$ なので、価格は $p = 8 - x$.
よって、収入は $R(x) = (8 - x) \times x = 8x - x^2$.
- (2) 利潤は $\pi(x) = (8x - x^2) - (x^2 + 1) = -2x^2 + 8x - 1$.
よって、 $\pi'(x) = -4x + 8 = 0$ を解くと $x = 2$.
- (3) $\pi''(x) = -4$ なので、 $x = 2$ のとき $\pi''(2) = -4 < 0$.
- (4) 以上より、 $x^* = 2$ のとき利潤は最大となり、そのときの利潤は $\pi(2) = 7$, 価格は $p = 6$.

注意 12.4. 各段階で何を求めているをまとめておきます。

- (1) 価格や収入を x で表す：独占企業の仮定 ($q = x$) と需要関数から、価格 p を生産量 x で表すことができます。それを用いて、収入 $R(x)$ を求めます。
- (2) 利潤を x で表し、利潤最大化の候補を求める：収入 $R(x)$ と費用 $C(x)$ を用いて、利潤 $\pi(x)$ を求めます。さらに、利潤最大化の1階条件 $\pi'(x) = 0$ を解くことで、最適な生産量（の候補） $x = x^*$ を求めます。
- (3) 最大（極大）となることを確認する： $x = x^*$ のときに、 $\pi''(x^*) < 0$ となることを確認します。^{*9}
- (4) そのときの利潤や価格を求める： $x = x^*$ のときの利潤や取引価格を求めます。

^{*9}あるいは、(2) で求めた解が複数ある場合には、(3) で $\pi''(x^*) < 0$ を確認することで正しい解を選ぶことができます。

12.2 企業がプライス・テイカーの場合

ここでは、完全競争市場において企業がプライス・テイカーである場合を考えます。プライス・テイカー (価格受容者)とは、自分の行動を変化させても市場価格に影響を与えず、市場価格を受け入れるだけの経済主体のことです。

その場合、消費者はこの企業から購入するしかないため、次が成り立ちます。

命題 12.5. 完全競争市場におけるプライス・テイカーの場合、取引価格 $p =$ 市場価格。

よって、財の価格は (企業の生産量ではなく) 市場価格から決まります。

例 12.6. ある財の市場価格が 4, その財を生産する企業の費用関数が $C(x) = x^2 + 1$ であるとする。この企業がプライス・テイカーであるとき、利潤を最大にする生産量 x^* を求める。

(1) プライス・テイカーの仮定から、価格は $p = 4$ 。

よって、収入は $R(x) = 4 \times x = 4x$ 。

(2) 利潤は $\pi(x) = 4x - (x^2 + 1) = -x^2 + 4x - 1$ 。

よって、 $\pi'(x) = -2x + 4 = 0$ を解くと $x = 2$ 。

(3) $\pi''(x) = -2$ なので、 $x = 2$ のとき $\pi''(2) = -2 < 0$ 。

(4) 以上より、 $x^* = 2$ のとき利潤は最大となり、そのときの利潤は $\pi(2) = 3$ 。

注意 12.7. 各段階で何を求めているをまとめておきます。

(1) 価格や収入を x で表す： プライス・テイカーの仮定から、価格 p は取引価格に一致します。それを用いて、収入 $R(x)$ を求めます。

(2) 利潤を x で表し、利潤最大化の候補を求める： 収入 $R(x)$ と費用 $C(x)$ を用いて、利潤 $\pi(x)$ を求めます。さらに、利潤最大化の 1 階条件 $\pi'(x) = 0$ を解くことで、最適な生産量 (の候補) $x = x^*$ を求めます。

(3) 最大 (極大) となることを確認する： $x = x^*$ のときに、 $\pi''(x^*) < 0$ となることを確認します。

(4) そのときの利潤を求める： $x = x^*$ のときの利潤を求めます。

12.3 企業がプライス・テイカーの場合の供給関数

ここでは、完全競争市場におけるプライス・テイカーに対して、その供給関数を求める、という問題を考えます。

まず完全競争市場におけるプライス・テイカーの場合、価格が一定なので、次の性質が成り立ちます。

命題 12.8. ある財の市場価格を p 、その財を生産する企業の費用関数を $C(x)$ とする。この企業がプライス・テイカーであるとき、次が成り立つ。

- (1) 収入は $R(x) = px$ 、利潤は $\pi(x) = px - C(x)$ 。
- (2) $\pi'(x^*) = 0$ (利潤最大化の1階条件) を満たすのは、 $p = MC(x^*)$ 、すなわち市場価格と限界費用が一致するとき。

さて本題に戻ります。まず供給関数とは「生産者の供給量を価格で表した関数」のことでした。ここでは価格を p 、供給量(生産量)を x で表すことにします。したがって、 $x = (p \text{ の式})$ という形を目指します。

企業がプライス・テイカーである場合、企業は市場価格に反応して最適な生産量を決定します。すなわち、企業は市場価格 p に対して「利潤最大化の1階条件」を満たすように生産量 x を決定するわけです。よって、「利潤最大化の1階条件」の条件から $p = MC(x)$ という関係が成り立ちます。この式の形は、価格 p を生産量 x で表した形ですので、これは逆供給関数とみなすことができます。

命題 12.9. プライス・テイカーである企業の逆供給関数は $p = MC(x)$ 。よって、供給曲線とは限界費用関数のグラフのこと。^{*10}

したがって、供給関数を求めたければ、この式を $x = (p \text{ の式})$ の形に直せばよいわけです。

例 12.10. ある財の市場価格が p 、その財を生産する企業の費用関数が $C(x) = x^2 + 1$ であるとする。この企業がプライス・テイカーであるとき、次が成り立つ。

- (1) $MC = 2x$ なので、逆供給関数は $p = 2x$ 。
- (2) よって供給関数は $x = \frac{1}{2}p$ 。

^{*10} もう少し正確に述べると、供給関数が $p = MC(x)$ として得られるのは、企業が利潤を得られるか、あるいは利潤がなくても可変費用分をカバーできている状況のときです。したがって、操業停止点を下回るような状況であれば、企業が操業を続けることができないので、供給関数は $x = 0$ と考えます。

12.4 練習問題

練習問題 1. ある財の需要関数が $q = 6 - p$, その財を生産する企業の費用関数が $C(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x$ であるとする. この企業がこの財を独占的に生産するとき, 次の問いに答えよ.

(1) 価格 p を生産量 x の式で表せ. また, 収入 $R(x)$ を生産量 x の式で表せ.

(2) 利潤 $\pi(x)$ を生産量 x の式で表せ. また, 利潤最大化の 1 階条件 $\pi'(x) = 0$ を満たす x を求めよ (ただし $x > 0$ とする).

(3) (2) で求めた x に対して, $\pi''(x)$ の値の正負を調べよ.

(4) 以上から, この企業の利潤を最大にする生産量 x^* とそのときの利潤 $\pi(x^*)$ を求めよ.

練習問題 2. ある財の市場価格が 5, その財を生産する企業の費用関数が $C(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 8x$ であるとする. この企業がプライス・テイカーであるとき, 次の問いに答えよ.

(1) 収入 $R(x)$ を生産量 x の式で表せ.

(2) 利潤 $\pi(x)$ を生産量 x の式で表せ. また, 利潤最大化の 1 階条件 $\pi'(x) = 0$ を満たす x を求めよ (ただし $x > 0$ とする).

(3) (2) で求めた x に対して, $\pi''(x)$ の値の正負を調べよ.

(4) 以上から, この企業の利潤を最大にする生産量 x^* とそのときの利潤 $\pi(x^*)$ を求めよ.

おまけ. この企業の平均費用 $AC(x)$ を求め, その最小値 (= 損益分岐価格) を求めよ.

13 経済数学入門 I (2018/07/18) : 効用の最大化

13.1 効用関数と限界効用

ここでは、効用関数とその限界効用を定義します。消費者が財を消費することで得られる満足度を 効用 といいます。

定義 13.1. ある財を消費したときにどのくらい効用が得られるかを表す関数を 効用関数 (utility function) といい、 U で表す。また、効用関数 U を消費量で微分したものを 限界効用 (marginal utility) という。*¹¹

効用関数は次の性質を満たす (と考えることが多いです)。

- 財の消費量が増加すると、効用も増加する (単調性),
- 財の消費量が増加すると、消費量を 1 単位追加したときに得られる効用 (限界効用) は減少する (限界効用逓減の法則)。

上記の性質は (U が 1 変数の場合には) それぞれ $U' > 0$, $U'' < 0$ を意味します。

注意 13.2. ただしこの授業では、効用関数は上記の性質を満たしているかどうかは気にしないことにします。

13.2 複数の財に関する効用

ここでは、財が 2 種類 (X, Y) の場合の効用関数を調べます。また、財の価格が与えられたときの予算制約式を求めます。

以下、財 X, Y の消費量をそれぞれ x, y で表し、 $x \geq 0, y \geq 0$ とします。

例 13.3. 効用関数を $U = 2x + y$ とすると、

(1) $(x, y) = (2, 2)$ のとき、効用は $U = 2 \times 2 + 2 = 6$,

(2) $(x, y) = (3, 1)$ のとき、効用は $U = 2 \times 3 + 1 = 7$,

(3) $(x, y) = (4, 0)$ のとき、効用は $U = 2 \times 4 + 0 = 8$ 。

例 13.4. 効用関数を $U = x^2y$ とすると、

(1) $(x, y) = (2, 2)$ のとき、効用は $U = 2^2 \cdot 2 = 8$,

(2) $(x, y) = (3, 1)$ のとき、効用は $U = 3^2 \cdot 1 = 9$ 。

(3) $(x, y) = (4, 0)$ のとき、効用は $U = 4^2 \cdot 0 = 0$ 。

注意 13.5. $U = x^a y^b$ の形の効用関数を コブ・ダグラス型効用関数 といいます。

*¹¹ 財が 1 種類 (U が 1 変数関数) の場合は、限界効用は MU でよいのですが、財が 2 種類以上 (U が多変数関数) の場合は、微分が「偏微分」になりますので、限界効用も MU_x, MU_y のように書いて区別します。

定義 13.6. 2 つの実数 a, b に対して, その小さい方を $\min\{a, b\}$ で表す.

例 13.7. 効用関数を $U = \min\{x, 3y\}$ とすると,

(1) $(x, y) = (2, 2)$ のとき, 効用は $U = \min\{2, 3 \cdot 2\} = \min\{2, 6\} = 2$,

(2) $(x, y) = (3, 1)$ のとき, 効用は $U = \min\{3, 3 \cdot 1\} = \min\{3, 3\} = 3$,

(3) $(x, y) = (4, 0)$ のとき, 効用は $U = \min\{4, 3 \cdot 0\} = \min\{4, 0\} = 0$.

練習問題 1. 次の効用関数 U と財の消費量 (x, y) に対して, そのときの効用を求めよ.

(1) $U = 3x + 2y, \quad (x, y) = (1, 2)$

(2) $U = xy, \quad (x, y) = (1, 2)$

(3) $U = x^2y, \quad (x, y) = (3, 4)$

(4) $U = \min\{3x, 2y\}, \quad (x, y) = (3, 4)$

定義 13.8. 財の価格及び消費量と, 予算の関係を表した式を 予算制約式 という. *12

命題 13.9. 財 X, Y の価格をそれぞれ p, q , 個人の所得を I とすると, 予算制約式は $px + qy = I$.

例 13.10. 財 X, Y の価格をそれぞれ 2, 1, 個人の所得を 3 とすると, 予算制約式は $2x + y = 3$.

練習問題 2. 次の価格 p, q と個人の所得 I に対して, そのときの予算制約式を求めよ.

(1) $p = 1, \quad q = 3, \quad I = 9$

(2) $p = 2, \quad q = 4, \quad I = 10$

*12 一般に予算内で消費する場合の制約条件は (連立) 不等式となります. しかし効用を最大化するには予算は使い切った方がよいので, 実際には予算制約式のみを考えれば十分です (これは数学的に正当化されます).

13.3 効用の最大化

ここでは効用の最大化問題を考えます。すなわち、

予算制約式 $px + qy = I$ の下で、効用関数 U を最大にする x, y を求める

という問題を解きます。

注意 13.11. 解法の手順は次の通りです：

- (1) 予算制約式 $px + qy = I$ を求め、 $y = (x \text{ の式})$ の形に変形する。
- (2) (1) の式を U に代入して、 $U = (x \text{ の式})$ にする。
さらに、 $U' = 0$ の解を求める (最大化の1階条件)。
- (3) (2) で求めた x が $U'' < 0$ を満たすことを確認する。
- (4) そのときの y や U の値を求める。

ここでは、コブ・ダグラス型効用関数 $U = x^a y^b$ の場合に、効用の最大化問題を解きます。以下、 $x, y > 0$ とします。*13

例 13.12. 財 X, Y の価格をそれぞれ 2, 1 とする。また、個人の所得を 3, 効用関数を $U = x^2 y$ ($x, y > 0$) とする。このとき、

- (1) 予算制約式は $2x + y = 3$ 。よって、 $y = -2x + 3$ 。
- (2) 効用関数 $U = x^2 y$ に代入すると、 $U = x^2 y = x^2(-2x + 3) = -2x^3 + 3x^2$ 。
よって、 $U' = -6x^2 + 6x = -6x(x - 1) = 0$ を解いて、 $x = 1$ 。 ($x = 0$ は不適。)
- (3) $U'' = -12x + 6$ なので、
 - $x = 1$ のとき、 $U'' = -6 < 0$ 。
- (4) $x = 1$ のとき、(1) より $y = -2x + 3 = 1$ 。また、 $U = x^2 y = 1$ 。

注意 13.13. 予算制約式や効用を「 y の式で表す」という方針で解くこともできます。

- (1) 予算制約式は $2x + y = 3$ 。よって、 $x = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$ 。
- (2) 効用関数 $U = x^2 y$ に代入すると、 $U = \left(-\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}\right)^2 y = \frac{1}{4}y^3 - \frac{3}{2}y^2 + \frac{9}{4}y$ 。
よって、 $U' = \frac{3}{4}y^2 - 3y + \frac{9}{4} = \frac{3}{4}(y - 1)(y - 3) = 0$ を解いて、 $y = 1, 3$ 。
- (3) $U'' = \frac{3}{2}y - 3$ なので、
 - $y = 1$ のとき、 $U'' = -\frac{3}{2} < 0$ 。
 - $y = 3$ のとき、 $U'' = \frac{3}{2} > 0$ 。(不適)
- (4) $y = 1$ のとき、(1) より $x = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{2} = 1$ 。また、 $U = x^2 y = 1$ 。

*13 $x = 0$ または $y = 0$ の場合、効用は $U = 0$ なので最大にはなりません。

13.4 消費者の需要関数

ここでは、消費者の需要関数を求める、という問題を考えます。

まず需要関数とは「消費者の需要量を価格で表した関数」のことでした。ここでは価格を p 、ある財 X の需要量 (消費量) を x で表すことにします。したがって、 $x = (p \text{ の式})$ という形を目指します。

注意 13.14. 以下、これまでのように個人は財 X, Y のみを消費することとします。そして、財 Y の価格は一定とします。その上で財 X に関する需要関数を求めます。

例 13.15. 財 X, Y の価格をそれぞれ $p, 1$ とする。また、個人の所得を 3 、効用関数を $U = x^2y$ ($x, y > 0$) とする。このとき、

(1) 予算制約式は $px + y = 3$ 。よって、 $y = -px + 3$ 。

(2) 効用関数 $U = x^2y$ に代入すると、 $U = x^2y = x^2(-px + 3) = -px^3 + 3x^2$ 。

よって、 $U' = -3px^2 + 6x = -3x(px - 2) = 0$ を解いて、 $x = \frac{2}{p}$ 。 ($x = 0$ は不適。)

(3) $U'' = -6px + 6$ なので、

• $x = \frac{2}{p}$ のとき、 $U'' = -6 < 0$ 。

よって価格 p における最適な消費量は $x = \frac{2}{p}$ であり、よって需要関数は $x = \frac{2}{p}$ 。

練習問題 3. 財 X, Y の価格をそれぞれ 1, 3, 個人の所得を 9 とする.

(1) 予算制約式を求めよ.

(2) 効用関数が $U = xy$ のとき, 効用を最大にする x, y の値を求めよ. (ただし $x, y > 0$ とする. 以下同様.)

(3) 効用関数が $U = x^2y$ のとき, 効用を最大にする x, y の値を求めよ.

(4) 効用関数が $U = xy^2$ のとき, 効用を最大にする x, y の値を求めよ.

(5) 効用関数が $U = x^2y^2$ のとき, 効用を最大にする x, y の値を求めよ.

おまけ. 効用関数が $U = \min\{2x, 3y\}$ のとき, 効用を最大にする x, y の値を求めよ.

14 経済数学入門 I (2018/07/25) : 需要の価格弾力性

弾力性 (elasticity) とは, 関数 $y = f(x)$ において x の変化率とそのときの y の変化率との割合のことです. ここでは, 簡単な需要関数に対してその価格弾力性を求めます.

14.1 需要の価格弾力性 (ver.1)

ここでは, 価格が変化したときの需要の価格弾力性を求めます.

定義 14.1. ある変数が a_1 から a_2 に変化したときの変化率は $\frac{a_2 - a_1}{a_1}$.

例 14.2. 次が成り立つ:

(1) 1 から 2 に変化したときの変化率は $\frac{2 - 1}{1} = 1$. (= 100%)

(2) 100 から 101 に変化したときの変化率は $\frac{101 - 100}{100} = \frac{1}{100}$. (= 1%)

(3) 100 から 99 に変化したときの変化率は $\frac{99 - 100}{100} = -\frac{1}{100}$. (= -1%)

価格の変化率に対する需要量の変化率の割合を, 需要の価格弾力性 といいます. ^{*14} これは「価格が 1% 変化したときに需要が何 % 変化するか」を表す量になります.

命題 14.3. ある財の価格が p_1 から p_2 に変化したとき, それに伴って需要量が D_1 から D_2 に変化したとする. このときの需要の価格弾力性 E は,

$$E = \frac{\text{需要量の変化率}}{\text{価格の変化率}} = \frac{\frac{D_2 - D_1}{D_1}}{\frac{p_2 - p_1}{p_1}} = \frac{D_2 - D_1}{p_2 - p_1} \cdot \frac{p_1}{D_1}.$$

例 14.4. 価格が 20 のとき需要量が 100 である財について,

(1) 価格が 25 のとき, 需要量が 90 になった場合,

$$\text{弾力性は } E = \frac{90 - 100}{25 - 20} \cdot \frac{20}{100} = -\frac{10}{5} \cdot \frac{1}{5} = -\frac{2}{5}.$$

(2) 価格が 25 のとき, 需要量が 75 になった場合,

$$\text{弾力性は } E = \frac{75 - 100}{25 - 20} \cdot \frac{20}{100} = -\frac{25}{5} \cdot \frac{1}{5} = -1.$$

(3) 価格が 25 のとき, 需要量が 50 になった場合,

$$\text{弾力性は } E = \frac{50 - 100}{25 - 20} \cdot \frac{20}{100} = -\frac{50}{5} \cdot \frac{1}{5} = -2.$$

^{*14} この授業では弾力性をすべて E で表すことにします. 他の教科書や授業では e, ε, η などを使っているかもしれません.

練習問題 1. 価格が 20 のとき需要量が 120 である財について、価格と需要量が次のように変化した場合の需要の価格弾力性 E を求めよ.

(1) 価格が 24 のとき、需要量が 100 になった場合.

(2) 価格が 24 のとき、需要量が 90 になった場合.

(3) 価格が 24 のとき、需要量が 60 になった場合.

14.2 需要の価格弾力性 (ver.2)

ここでは、需要関数 $q = D(p)$ が与えられているときに、ある価格 p における需要の価格弾力性を求めます.

まず、ある財の需要関数が $q = D(p)$ であるとき、価格が p から $p + h$ に変化したときの需要の価格弾力性は、命題 14.3 より、

$$\frac{\frac{D(p+h) - D(p)}{D(p)}}{\frac{(p+h) - p}{p}} = \frac{D(p+h) - D(p)}{h} \cdot \frac{p}{D(p)}$$

となります. ここで、変化量 h を十分小さくしたとき (すなわち $h \rightarrow 0$ の極限を考えたとき) の値を、価格 p における需要の価格弾力性と考えます.

定義 14.5. ある財の需要関数が $q = D(p)$ であるとき,

$$E(p) = D'(p) \cdot \frac{p}{D(p)}$$

を, 価格 p における 需要の価格弾力性 という.

命題 14.6. 需要関数が $q = ap + b$ (一次関数) のときは $E(p) = a \cdot \frac{p}{q}$

例 14.7. ある財の需要関数が $q = 10 - 2p$ であるとする.

(1) 価格が $p = 2$ のとき, 需要量は $q = 6$ なので, 弾力性は $E(2) = -2 \cdot \frac{2}{6} = -\frac{2}{3}$.

(2) 価格が $p = 3$ のとき, 需要量は $q = 4$ なので, 弾力性は $E(3) = -2 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{3}{2}$.

練習問題 2. ある財の需要関数が $q = 15 - 3p$ であるとする. 次の価格における弾力性 $E(p)$ を求めよ.

(1) $p = 2$

(2) $p = 3$

(3) $p = 4$

注意 14.8. 一般的に, 価格が増加すると需要量は減少するため, 需要の価格弾力性は負の値になります. そのため, その“絶対値”をとった値を弾力性と定義する場合があります.

14.3 弾力的・非弾力的

定義 14.9. ある財に対して、価格が p のとき、

- (1) 弾力性の絶対値が 1 より大きい ($|E(p)| > 1$) とき、弾力的 (elastic),
- (2) 弾力性の絶対値が 1 より小さい ($|E(p)| < 1$) とき、非弾力的 (inelastic)

という。

例 14.10. ある財の需要関数が $q = 10 - 2p$ であるとする。

- (1) 価格が $p = 2$ のとき、弾力性の絶対値は $|E(2)| = \frac{2}{3} < 1$ なので、非弾力的.
- (2) 価格が $p = 3$ のとき、弾力性の絶対値は $|E(3)| = \frac{3}{2} > 1$ なので、弾力的.

練習問題 3. ある財の需要関数が $q = 15 - 3p$ であるとする. 次の価格のとき「弾力的」か「非弾力的」か答えよ.

(1) $p = 2$

(2) $p = 3$

(3) $p = 4$

需要の価格弾力性は、「価格の変化に対して、需要量 (つまり消費者) がどのように反応するかを表す指標」になります. 実際,

- 弾力的ならば、価格が上昇すると需要量は急に減少する,
- 非弾力的ならば、価格が上昇しても需要量は大きくは減少しない

となります.