数学通論 II 演習・演習問題　No. 1　(2019/10/03)

配布したプリントは https://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lecture/19tsuron2ex.html にも置いてあります.

問 1. X を集合とする.

(1) $A, B \subset X$ に対して, 「$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B^c$」が成り立つことを示せ.

(2) $A_\lambda \subset X$ $(\lambda \in \Lambda)$ に対して, $\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$ が成り立つことを示せ.

(3) $A \subset X$ とし, $j : A \to X$ を包含写像とする. このとき, 任意の $O \subset X$ に対して, $j^{-1}(O) = A \cap O$ が成り立つことを示せ.

問 2. X, Y を集合, $f : X \to Y$ を写像とする.

(1) $A \subset X$ に対して, $A \subset f^{-1}(f(A))$ が成り立つことを示せ. また等号が成り立つかどうか調べよ.

(2) $A_\lambda \subset X$ $(\lambda \in \Lambda)$ に対して, $f(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \subset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$ が成り立つことを示せ. また等号が成り立つかどうか調べよ.

(3) $B \subset Y$ に対して, $f(f^{-1}(B)) \subset B$ が成り立つことを示せ. また等号が成り立つかどうか調べよ.

(4) $B_\lambda \subset Y$ $(\lambda \in \Lambda)$ に対して, $f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$ が成り立つことを示せ. また等号が成り立つかどうか調べよ.

問 3. 次の $A, B \subset \mathbb{R}$ に対して, 全単射写像 $f : A \to B$ を構成せよ.

(1) $A = \mathbb{R}$, $B = (0, \infty)$　　(2) $A = [0, 1)$, $B = (0, 1)$

問 4. X, Y を集合, $\sim$ を X 上の同値関係とする. 各 $x \in X$ に対して, x の同値類 $[x]$ と表し, また $\pi : X \to X/_\sim : x \mapsto [x]$ とする.

(1) 任意の $a, b \in X$ に対して, 次の各条件は同値であることを示せ.

(i) $a \sim b$　　(ii) $[a] = [b]$　　(iii) $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

(2) 写像 $f : X \to Y$ は「$\forall x_1, x_2 \in X$, $(x_1 \sim x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2))$」を満たすとする. このとき, $f = g \circ \pi$ を満たす写像 $g : X/_\sim \to Y$ が唯一つ存在することを示せ.

問 5. X, Y を集合, $f : X \to Y$ を写像とする. X 上の同値関係を $a \sim b :\Leftrightarrow f(a) = f(b)$ で定め, $g : X/_\sim \to Y$ を前問の (2) で与えられる写像とする.

(1) $\sim$ は X 上の同値関係であることを確かめよ.

(2) f が全射であるとき, g は全単射であることを示せ.

配布したプリントは https://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lecture/19tsuron2ex.html にも置いてあります.

問 6. (X, d) を距離空間とする. このとき, 次が成り立つことを示せ.

(1) 点 $a \in X$ の ε-近傍 $U(a, \varepsilon)$ は開集合である.

(2) O_1, O_2 が開集合ならば, $O_1 \cap O_2$ も開集合である.

(3) 各 O_λ $(\lambda \in \Lambda)$ が開集合ならば, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ も開集合である.

問 7. d を $\mathbb{R}$ 上の自然な距離 $(d(x, y) := |x - y|)$ とする.

(1) 開区間 (a, b) が開集合であること, 半開区間 $[a, b)$ が開集合でないことを示せ.

(2) 一般に, 各 O_λ $(\lambda \in \Lambda)$ が開集合であっても, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ が開集合になるとは限らない. $(\mathbb{R}, d)$ の場合にそれを示せ.

問 8. $\mathbb{R}^2$ 上に 2 種類の距離 d_1, d_2 を次で定める:

$$d_1(x, y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|,$$
$$d_2(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

ただし, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ とする. また, 点 $a \in \mathbb{R}^2$ の距離 d_i $(i = 1, 2)$ に関する ε-近傍を $U_i(a, \varepsilon)$ と表すこととする (ここだけの記法).

(1) d_1 が $\mathbb{R}^2$ 上の距離であることを確かめよ. また, ε-近傍 $U_1((0, 0), 1)$ を図示せよ.

(2) 「$\forall a \in \mathbb{R}^2, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. $U_1(a, \delta) \subset U_2(a, \varepsilon)$」が成り立つことを示せ.

(3) 「$\forall a \in \mathbb{R}^2, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. $U_2(a, \delta) \subset U_1(a, \varepsilon)$」が成り立つことを示せ.

問 9. (X, d) を距離空間とする. 次が成り立つことを示せ.

(1) $A \subset X$ が閉集合であるための必要十分条件は, "補集合が開集合" であることである.

(2) 一点集合 $\{x\}$ は閉集合である.

(3) $\forall x_1, x_2 \in X$ $(x_1 \neq x_2)$, $\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ s.t. $U(x_1, \varepsilon_1) \cap U(x_2, \varepsilon_2) = \emptyset$.

(4) 対角線集合 $\Delta(X) := \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$ は直積距離空間 $X \times X$ の閉集合である.

問 10. (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とする. 次が成り立つことを示せ.

(1) 写像 $f : X \to Y$ が連続であるための必要十分条件は, "開集合の逆像が開集合" であることである.

(2) $y_0 \in Y$ を固定し, $g : X \to Y$ を $g(x) := y_0$ で定めると, g は連続である.

(3) $h : X \times Y \to X$ を $h(x, y) := x$ で定めると, h は連続である.

数学通論 II 演習・演習問題　No. 3　(2019/10/10)

配布したプリントは https://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lecture/19tsuron2ex.html にも置いてあります.

問 11. 次の問いに答えよ.

(1) $X = \{1, 2, 3\}$ とし,

$$\mathcal{O} := \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$$
$$\mathcal{O}' := \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$$

とおく. $\mathcal{O}$ は X 上の位相となること, また $\mathcal{O}'$ が X 上の位相とならないことを示せ.

(2) $X = \{1, 2\}$ とする. X 上の位相をすべて求めよ.

問 12. X を集合とする. 次の問いに答えよ.

(1) $\mathcal{O}^d := \mathcal{P}(X)$ とおく. $\mathcal{O}^d$ は X 上の位相となることを示せ. (**離散位相**)

(2) $\mathcal{O}^t := \{\emptyset, X\}$ とおく. $\mathcal{O}^t$ は X 上の位相となることを示せ. (**密着位相**)

(3) X 上の任意の位相 $\mathcal{O}$ に対して, $\mathcal{O}_t \subset \mathcal{O} \subset \mathcal{O}_d$ が成り立つことを示せ.

問 13. $\mathbb{R}$ の部分集合族 $\mathcal{O}^+$, $\mathcal{O}'$ を

$$\mathcal{O}^+ := \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$
$$\mathcal{O}' := \{[a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

で定める. 次の問いに答えよ.

(1) $\mathcal{O}^+$ は $\mathbb{R}$ 上の位相となることを示せ.

(2) $\mathcal{O}^+ \subsetneq \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ が成り立つことを示せ.

(3) $\mathcal{O}'$ は $\mathbb{R}$ 上の位相とはならないことを示せ.

問 14. (X, d) を離散距離空間, $\mathcal{O}_d$ を離散距離 d から定まる X 上の位相とする. このとき, $\mathcal{O}_d$ は離散位相に一致することを示せ.

問 15. d_1, d_2 を問 8 で定めた $\mathbb{R}^2$ 上の距離とし, $\mathcal{O}_i$ $(i = 1, 2)$ を d_i から定まる位相とする.

(1) $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ となることを示せ.

(2) さらに, $\mathbb{R}^2$ 上の距離 $d_{\max}$ を

$$d_{\max}(x, y) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

で定め, $\mathcal{O}_{\max}$ を $d_{\max}$ から定まる位相とする ($d_{\max}$ が距離であることは認める). このとき, $\mathcal{O}_2 = \mathcal{O}_{\max}$ となることを示せ.

問 16. X を集合とする.

$$\mathcal{O}^Z := \{A \subset X \mid A^c : \text{有限}\} \cup \{\emptyset\}$$

とおく. このとき, $\mathcal{O}^Z$ は X 上の位相となることを示せ.

問 17. $X = \{1, 2, 3\}$ 上の位相 $\mathcal{O}$ を

$$\mathcal{O} := \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$$

で定める (問 11 参照). $A := \{1, 3\}$, $B := \{2, 3\}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) 1 が A の内点であること, 3 が A の内点でないことを定義に従って示せ.

(2) B の内部 B° を予想し, それを定義に従って示せ.

問 18. $\mathbb{R}$ 上の位相 $\mathcal{O}^+$ を

$$\mathcal{O}^+ := \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

で定める (問 13 参照). $A := [0, \infty)$, $B := [0, 2)$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) 1 が A の内点であること, 1 が B の内点でないことを定義に従って示せ.

(2) B の内部 B° を予想し, それを定義に従って示せ.

問 19. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, A を X の部分集合とする. 次が成り立つことを示せ.

(1) $A^\circ \subset A$.

(2) $\forall O \in \mathcal{O}$, $O \subset A \Rightarrow O \subset A^\circ$.

(3) A° は開集合である.

(4) 次は同値:

 (i) A は開集合 (i.e., $A \in \mathcal{O}$),

 (ii) $\forall x \in A$, $\exists O$: x の開近傍 s.t. $O \subset A$,

 (iii) $A = A^\circ$.

問 20. $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}^d$, $\mathcal{O}^t$, $\mathcal{O}^+$ を順に $\mathbb{R}$ 上の通常の位相, 離散位相, 密着位相, 問題 18 で定めた位相とする. このとき, 各位相に対して, $A := [0, \infty)$ の内部 A° を求めよ.

問 21. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, A, B を X の部分集合とする. 次が成り立つかどうか調べよ (真ならば証明し, 偽ならば反例を挙げよ).

(1) $A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$.

(2) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

(3) $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$.

数学通論 II 演習・演習問題　No. 4　(2019/10/17)

配布したプリントは `https://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lecture/19tsuron2ex.html` にも置いてあります.

問 22. (X, d) を距離空間, $\mathcal{O}$ を距離から定まる位相とし, $A \subset X$ とする.

(1) 「距離空間の意味で A の内点である」ことと「位相空間の意味で A の内点である」ことが同値であることを示せ.

(2) 「距離空間の意味で A の触点である」ことと「位相空間の意味で A の触点である」ことが同値であることを示せ.

問 23. $X = \{1, 2, 3\}$ 上の位相 $\mathcal{O}$ を

$$\mathcal{O} := \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$$

で定める (問 11, 17 参照). $A := \{1\}$, $B := \{2, 3\}$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) 2 が A の触点でないこと, 3 が A の触点であることを定義に従って示せ.

(2) B の閉包 $\overline{B}$ を予想し, それを定義に従って示せ.

問 24. $\mathbb{R}$ 上の位相として, 右半直線の位相 $\mathcal{O}^+$ を考える (定義は問 13, 18 を参照). $A := \{0\}$, $B := [0, 2)$ とおく. 次の問いに答えよ.

(1) 2 が A の触点でないこと, -1 が A の触点であることを定義に従って示せ.

(2) B の閉包 $\overline{B}$ を予想し, それを定義に従って示せ.

問 25. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, A を X の部分集合とする. $(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$ と内部に関する性質 (問 19) を用いて, 次が成り立つことを示せ.

(1) $A \subset \overline{A}$.

(2) $\forall F : X$ の閉集合, $A \subset F \Rightarrow \overline{A} \subset F$.

(3) $\overline{A}$ は閉集合である.

問 26. $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}^d$, $\mathcal{O}^t$, $\mathcal{O}^+$ を順に $\mathbb{R}$ 上の通常の位相, 離散位相, 密着位相, 右半直線の位相とする. このとき, 各位相に対して, $A := (0, \infty)$ の閉包 $\overline{A}$ を求めよ.

問 27. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, A, B を X の部分集合とする. 次が成り立つかどうか調べよ.

(1) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

(2) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

(3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

問 28. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする. 各 A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ が閉集合ならば, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ も閉集合であることを示せ.

問 29. $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{O}^+$ をそれぞれ $\mathbb{R}$ 上の通常の位相, 右半直線の位相とする. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ -1 & (x \leq 0) \end{cases}$$

で定める.

(1) $f : (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\mathbb{R}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\mathbb{R}})$ は連続写像でないことを, 定義に従って示せ.

(2) $f : (\mathbb{R}, \mathcal{O}_{\mathbb{R}}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}^+)$ は連続写像であることを, 定義に従って示せ.

(3) $f : (\mathbb{R}, \mathcal{O}^+) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}^+)$ は連続写像かどうか調べよ.

問 30. $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $f : X \to Y$ を写像とする. 「$\mathcal{O}_X$ が離散位相」または「$\mathcal{O}_Y$ が密着位相」のとき, f は連続写像であることを示せ.

問 31. $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $f : X \to Y$ を写像とする. 次の 3 条件

(i) $f : X \to Y$ は連続. (i.e., $\forall O \in \mathcal{O}_Y$, $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$.)

(ii) $\forall x \in X$, $\forall V$: $f(x)$ の開近傍, $f^{-1}(V)$: x の開近傍.

(iii) $\forall A \subset Y$, $f^{-1}(A^\circ) \subset (f^{-1}(A))^\circ$.

を考える.

(1) 条件 (i) と 条件 (ii) が同値であることを示せ.

(2) 条件 (i) と 条件 (iii) が同値であることを示せ.

問 32. X を集合, $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ を X 上の位相とする. このとき, $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ が成り立つための必要十分条件は, 恒等写像 $\mathrm{id} : (X, \mathcal{O}_2) \to (X, \mathcal{O}_1)$ が連続であることを示せ.

問 33. $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $f : X \to Y$ を連続写像とする. 次が成り立つかどうか調べよ

(1) $\forall O \in \mathcal{O}_X$, $f(O) \in \mathcal{O}_Y$. (このような写像を **開写像** という.)

(2) $\forall A$: X の閉集合, $f(A)$: Y の閉集合. (このような写像を **閉写像** という.)

問 34. 次の問いに答えよ.

(1) $X = \{1, 2, 3\}$ とし,

$$\mathcal{O}_1 := \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$$
$$\mathcal{O}_2 := \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

とおく ($\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ が位相であることは認める). このとき, 位相空間 $(X, \mathcal{O}_1)$ と $(X, \mathcal{O}_2)$ は同相かどうか調べよ.

(2) $X = \{1, 2\}$ とする. X 上の各位相が互いに同相かどうかを判定せよ.

問 35. X, Y を位相空間, $f : X \to Y$ を全単射かつ連続な写像とする. このとき, 次の 3 条件は同値であることを示せ.

(i) f は開写像である.

(ii) f は閉写像である.

(iii) f は同相写像である.

注意： 以下, 特に断らない限り, 位相空間の部分集合には相対位相を入れるものとする.

問 36. $\mathcal{O}$ を $\mathbb{R}^2$ 上の通常の位相とする.

$$S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

とおき, S^1 上には $\mathbb{R}^2$ からの相対位相を入れる. さらに,

$$A := \{(\cos\theta, \sin\theta) \mid \theta \in (0, \frac{\pi}{2})\} \subset S^1$$

とおく. 次が成り立つことを定義に従って示せ.

(1) A は S^1 内の開集合である.

(2) A は $\mathbb{R}^2$ 内の開集合でない.

問 37. $(\mathbb{R}, \mathcal{O}^+)$ を $\mathbb{R}$ 上の右半直線の位相を入れた位相空間とし, $A := [0, 2] \subset \mathbb{R}$ とおく. $(1, 2]$ は A 内の開集合であること, また $[0, 1)$ は A 内の開集合でないことを示せ.

問 38. X を位相空間とし, $A \subset B \subset X$ とする. 次が成り立つかどうか調べよ

(1) B が X の開集合であり, A が B の開集合ならば, A は X の開集合である.

(2) B が X の閉集合であり, A が B の閉集合ならば, A は X の閉集合である.

問 39. (X, d) を距離空間, $\mathcal{O}_X$ を d から定まる X の位相とする. 部分集合 $A \subset X$ に対して, $\mathcal{O}_X$ から定まる A の相対位相を $\mathcal{O}_A$ とし, d を A に制限した距離 d_A から定まる A の位相を $\mathcal{O}_{d_A}$ とする. このとき, $\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_{d_A}$ が成り立つことを示せ.

問 40. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, $A \subset X$ を部分集合とする.

(1) $\mathcal{O}_X$ が離散位相ならば, A の相対位相も離散位相になることを示せ.

(2) $\mathcal{O}_X$ が密着位相ならば, A の相対位相も密着位相になることを示せ.

問 41. X, Y を位相空間, $f : X \to Y$ を写像とする.

(1) $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X の開被覆とする. このとき, 制限写像 $f|_{U_\lambda} : U_\lambda \to Y$ がすべて連続ならば, $f : X \to Y$ も連続写像であることを示せ.

(2) A, B を X の閉集合とし, $X = A \cup B$ を満たすとする. このとき, 制限写像 $f|_A : A \to Y$, $f|_B : B \to Y$ がともに連続ならば, $f : X \to Y$ も連続写像であることを示せ.

問 42. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間とし, $A \subset X$ を部分集合, $j : A \to X$ を包含写像, $\mathcal{O}_A$ を $\mathcal{O}_X$ から定まる A 上の相対位相とする. 次が成り立つことを示せ.

(1) $j : (A, \mathcal{O}_A) \to (X, \mathcal{O}_X)$ は連続である.

(2) $\mathcal{O}$ を A 上の (相対位相とは限らない) 位相とする. このとき, $j : (A, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{O}_X)$ が連続であるための必要十分条件は, $\mathcal{O}_A \subset \mathcal{O}$ が成り立つことである.

(3) $(B, \mathcal{O})$ を位相空間, $f : B \to A$ を写像とする. このとき, $f : (B, \mathcal{O}) \to (A, \mathcal{O}_A)$ が連続であるための必要十分条件は, $j \circ f : (B, \mathcal{O}) \to (X, \mathcal{O}_X)$ が連続であることである.

問 43. $(\mathbb{R}, \mathcal{O}^+)$ はコンパクトでないことを定義に従って示せ, ここで $\mathcal{O}^+$ は $\mathbb{R}$ 上の右半直線の位相とする.

問 44. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする.

(1) X が有限集合のとき, $(X, \mathcal{O})$ はコンパクトであることを示せ.

(2) $\mathcal{O}$ が密着位相のとき, $(X, \mathcal{O})$ はコンパクトであることを示せ.

(3) $\mathcal{O}$ が離散位相のとき, $(X, \mathcal{O})$ はコンパクトであるための必要十分条件は, X が有限集合であることを示せ.

問 45. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間とし, $A \subset X$ とする. このとき, 次は同値であることを示せ.

(i) A が相対位相 $\mathcal{O}_A$ に関してコンパクト位相空間である.

(ii) A は X 内のコンパクト部分集合である, すなわち, 次が成り立つ:

$$\forall \{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{O}_X, \text{“} A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \Rightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda \text{ s.t. } A \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_{\lambda_i} \text{”}.$$

問 46. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする. 次が成り立つかどうか調べよ.

(1) $A, B \subset X$ がコンパクトならば, $A \cup B$ もコンパクトである.

(2) $A, B \subset X$ $(A \cap B \neq \emptyset)$ がコンパクトならば, $A \cap B$ もコンパクトである.

問 47. $(X, \mathcal{O})$ をコンパクト位相空間とする. 次が成り立つかどうか調べよ.

(1) $A \subset X$ が閉集合ならば, A はコンパクトである.

(2) $A \subset X$ がコンパクトならば, A は閉集合である.

問 48. 閉区間 $[0, 1]$ がコンパクトであることを利用して, 単位円 S^1 がコンパクトであることを示せ. ただし, $[0, 1]$, S^1 はそれぞれ $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ の標準的な位相に関する部分空間と見なす. (ヒント：まず “よい” 連続写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を構成せよ.)

数学通論 II 演習・演習問題　No. 6　(2019/10/31)

配布したプリントは https://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lecture/19tsuron2ex.html にも置いてあります.

問 49. 次の位相空間が連結かどうか定義に従って調べよ (ただし $X \neq \emptyset$ とする).

(1) 密着位相空間 $(X, \mathcal{O}^t)$.

(2) 離散位相空間 $(X, \mathcal{O}^d)$.

(3) $X := \{1,2,3\}$ とし,

$$\mathcal{O} := \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$$

とおいたときの, 位相空間 $(X, \mathcal{O})$.

(4) 位相空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}^+)$, ただし $\mathcal{O}^+$ は右半直線の位相とする.

問 50. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間とし, $A \subset X$ とする. このとき, 次は同値であることを示せ.

(i) A が相対位相 $\mathcal{O}_A$ に関して非連結な位相空間である.

(ii) $\exists O_1, O_2 \in \mathcal{O}_X$ s.t. "$A \subset O_1 \cup O_2$, $A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$, $O_1 \cap A \neq \emptyset$, $O_2 \cap A \neq \emptyset$".

問 51. $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ を通常のユークリッド空間とする. 部分集合 $I \subset A$ に対して, 次の条件

(i) I は連結な部分集合である.

(ii) $\forall a, b \in I\ (a < b)$, $(a,b) \subset I$.

を考える.

(1) (i) $\Rightarrow$ (ii) が成り立つことを示せ.

(2) (ii) $\Rightarrow$ (i) が成り立つことを示せ. ただし, 「$\mathbb{R}$ の空でない上に有界な部分集合は上限を持つ」ことを認める.

問 52. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし, $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を X の部分集合族で, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ を満たすものとする. このとき, 各 A_λ が連結ならば, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ も連結であることを示せ.

問 53. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし, $A, B \subset X$ を $A \subset B \subset \overline{A}$ を満たす部分集合とする. このとき, A が連結ならば B も連結であることを示せ.

問 54. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし, X 上の二項関係 $\sim_C$ を次で定める: $a, b \in X$ に対して,

$$a \sim_C b \ :\Leftrightarrow\ a, b \text{ を含む連結な部分集合が存在する.}$$

(1) $\sim_C$ は X 上の同値関係であることを示せ.

(2) $\sim_C$ に関する $a \in X$ の同値類を $C(a)$ と表す. $C(a)$ は a を含む連結な部分集合であり, そのような部分集合のなかで最大なものであることを示せ.

(3) $C(a)$ は閉集合であることを示せ. また開集合であるか調べよ.

(4) $A \subset X$ を連結な部分集合とし, 開集合かつ閉集合であるとする. このとき, $a \in A$ ならば $A = C(a)$ となることを示せ.

問 55. X を (空でない) 連結位相空間, Y を離散位相空間, $f : X \to Y$ を連続写像とする. このとき, f は定値写像となることを示せ. また X が非連結の場合はどうか調べよ.

問 56. 次の位相空間が弧状連結かどうか定義に従って調べよ (ただし $X \neq \emptyset$ とする).

(1) 密着位相空間 $(X, \mathcal{O}^t)$.

(2) 離散位相空間 $(X, \mathcal{O}^d)$.

(3) $X := \{1, 2, 3\}$ とし,

$$\mathcal{O} := \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$$

とおいたときの, 位相空間 $(X, \mathcal{O})$.

(4) 位相空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}^+)$, ただし $\mathcal{O}^+$ は右半直線の位相とする.

問 57. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間とし, $A \subset X$ とする. このとき, 次は同値であることを示せ.

(i) A が相対位相 $\mathcal{O}_A$ に関して弧状連結な位相空間である.

(ii) $\forall a, b \in A$, $\exists c : [0,1] \to X$: 連続 s.t. "$c([0,1]) \subset A$, $c(0) = a$, $c(1) = b$".

問 58. $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O})$ を通常のユークリッド空間とする. 次の部分集合が弧状連結かどうか調べよ.

(1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$.

(2) $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

(3) $\mathbb{R}^2$ から有限個の点を除いた集合.

(4) $\Gamma_f := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I\}$, ただし, $I \subset \mathbb{R}$ は区間, $f : I \to \mathbb{R}$ は (通常の位相に関する) 連続関数とする.

問 59. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし, $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を X の部分集合族で, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ を満たすものとする. このとき, 各 A_λ が弧状連結ならば, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ も弧状連結であることを示せ.

問 60. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $A \subset X$ とする. このとき, 「A が弧状連結ならば, 閉包 $\overline{A}$ も弧状連結である」が成り立つかどうか調べよ.

問 61. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし, X 上の二項関係 $\sim_{PC}$ を次で定める: $a, b \in X$ に対して,

$$a \sim_{PC} b \ :\Leftrightarrow\ a, b \text{ を含む弧状連結な部分集合が存在する.}$$

(1) $\sim_{PC}$ は X 上の同値関係であることを示せ.

(2) $\sim_{PC}$ に関する $a \in X$ の同値類を $PC(a)$ と表す. $PC(a)$ は a を含む弧状連結な部分集合であり, そのような部分集合のなかで最大なものであることを示せ.

(3) 各 $PC(a) \subset X$ が開集合であると仮定する. このとき, $a \in X$ に対して, $PC(a) = C(a)$ となることを示せ ($C(a)$ の定義は問 54 を参照).

数学通論 II 演習・演習問題　No. 7　　(2019/11/08)

配布したプリントは `https://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lecture/19tsuron2ex.html` にも置いてあります.

問 62. 次の位相空間がハウスドルフ空間 (T_2 空間) かどうか定義に従って調べよ (ただし $X \neq \emptyset$ とする).

(1) 密着位相空間 $(X, \mathcal{O}^t)$.

(2) 離散位相空間 $(X, \mathcal{O}^d)$.

(3) $X := \{1, 2, 3\}$ とし,

$$\mathcal{O} := \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$$

とおいたときの, 位相空間 $(X, \mathcal{O})$.

(4) 位相空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}^+)$, ただし $\mathcal{O}^+$ は右半直線の位相とする.

(5) 位相空間 $(X, \mathcal{O}_d)$, ただし $\mathcal{O}_d$ は X 上の距離 d から定まる位相とする.

問 63. $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を連続写像とする. 次が成り立つかどうか調べよ.

(1) X がハウスドルフで, f が全射ならば, Y もハウスドルフ.

(2) Y がハウスドルフで, f が単射ならば, X もハウスドルフ.

(3) X がハウスドルフのとき, 部分空間 $A \subset X$ もハウスドルフ.

問 64. $(X, \mathcal{O})$ をハウスドルフ空間とする. 次が成り立つかどうか調べよ.

(1) $A \subset X$ が閉集合ならば, A はコンパクトである.

(2) $A \subset X$ がコンパクトならば, A は閉集合である.

(3) A, B ($A \cap B \neq \emptyset$) がコンパクトならば, $A \cap B$ もコンパクトである.

問 65. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ がハウスドルフ空間であるための必要十分条件は,

$$\forall x \in X, \quad \bigcap_{U\,:\,x\ \text{の開近傍}} \overline{U} = \{x\}$$

が成り立つことであることを示せ.

問 66. X を有限集合とする. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が離散位相空間であること, ハウスドルフ空間であること, T_1 空間であることは互いに同値であることを示せ.

問 67. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ をハウスドルフ空間, $f, g : X \to Y$ を連続写像とする. このとき, $I := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ は X 内の閉集合であることを示せ. また f, g が部分集合 $A \subset X$ 上で一致するならば閉包 $\overline{A}$ 上でも一致することを示せ.

数学通論 II 演習・演習問題　No. 8　　(2019/11/15)

配布したプリントは https://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lecture/19tsuron2ex.html にも置いてあります.

問 68. 次の部分集合族 $\mathcal{B}$ が $\mathbb{R}^2$ の標準的な位相 $\mathcal{O}$ の開基であることを定義に従って示せ.

(1) $\mathcal{B} := \{U(x;\varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}^2, \varepsilon > 0\}$.

(2) $\mathcal{B} := \{(a,b) \times (c,d) \subset \mathbb{R}^2 \mid a < b, c < d\}$.

問 69. X を集合とする.

(1) $\mathcal{B} := \{X\}$ とおく. $\mathcal{B}$ が X の密着位相 $\mathcal{O}^t$ の開基であることを示せ.

(2) $\mathcal{B} := \{\{x\} \mid x \in X\}$ とおく. $\mathcal{B}$ が X の離散位相 $\mathcal{O}^d$ の開基であることを示せ.

問 70. 次の部分集合族 $\mathcal{B}$ が $\mathbb{R}$ の開基であるか ($\mathbb{R}$ のある位相の開基になるか) どうかを調べよ.

(1) $\mathcal{B} := \{(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \subset \mathbb{R} \mid \varepsilon > 0\}$.

(2) $\mathcal{B} := \{(x-1, x+1) \subset \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R}\}$.

(3) $\mathcal{B} := \{(p,q) \subset \mathbb{R} \mid p, q \in \mathbb{Q}, p < q\}$.

問 71. X を集合, $\mathcal{B}$ を X の開基とする. また, $\mathcal{S}$ を X の部分集合族とし,

$$\mathcal{B}(\mathcal{S}) := \{\bigcap_{k=1}^{n} W_k \mid n \in \mathbb{N}, W_1, W_2, \ldots W_n \in \mathcal{S}\} \cup \{X\}$$

と定める. 次が成り立つことを示せ.

(1) $\forall \mathcal{O}$: X の位相, $\mathcal{B} \subset \mathcal{O} \Rightarrow \langle \mathcal{B} \rangle \subset O$.

(2) $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ は X の開基である.

(3) $\forall \mathcal{O}$: X の位相, $\mathcal{S} \subset \mathcal{O} \Rightarrow \langle \mathcal{B}(\mathcal{S}) \rangle \subset O$.

問 72. $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $f : X \to Y$ を写像とする. また, $\mathcal{B}_X$, $\mathcal{B}_Y$ をそれぞれ位相 $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{O}_Y$ の開基とする. このとき, 次の 3 条件

(i) $f : X \to Y$ は連続. (i.e., $\forall O \in \mathcal{O}_Y$, $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$.)

(ii) $\forall V \in \mathcal{B}_Y$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$.

(iii) $\forall x \in X$, $\forall V \in \mathcal{B}_Y$ with $f(x) \in V$, $\exists W \in \mathcal{B}_X$ with $x \in W$ s.t. $W \subset f^{-1}(V)$.

を考える.

(1) 条件 (i) と 条件 (ii) が同値であることを示せ.

(2) 条件 (ii) と 条件 (iii) が同値であることを示せ.

数学通論 II 演習・演習問題　No. 9 (2019/11/21)

配布したプリントは https://home.hiroshima-u.ac.jp/akira-kubo/lecture/19tsuron2ex.html にも置いてあります.

問 73. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする. 次が成り立つことを示せ.

(1) X が T_3 空間であるための必要十分条件は,

$$\forall x \in X,\ \forall O : x \text{ の開近傍},\ \exists O_x \in \mathcal{O} \text{ s.t. } x \in O_x \subset \overline{O_x} \subset O$$

が成り立つことである.

(2) X が T_4 空間であるための必要十分条件は,

$$\forall A : \text{閉集合},\ \forall O \in \mathcal{O} \text{ with } A \subset O,\ \exists O_A \in \mathcal{O} \text{ s.t. } A \subset O_A \subset \overline{O_A} \subset O$$

が成り立つことである.

問 74. X を集合, $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ を X の位相とする. 位相 $\mathcal{O}_1$ の開基 $\mathcal{B}_1$ で,

$$\forall B \in \mathcal{B}_1,\ \forall x \in B,\ \exists O \in \mathcal{O}_2 \text{ s.t. } x \in O \subset B$$

を満たすものが存在するとき, $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ が成り立つことを示せ.

問 75. $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とし, $(X \times Y, \mathcal{O}_{X\times Y})$ をその直積空間とする. また, $A \subset X$, $B \subset Y$ とし, $\mathcal{O}_A$, $\mathcal{O}_B$ をそれぞれの相対位相とする. このとき, $A \times B$ において, $\mathcal{O}_A$, $\mathcal{O}_B$ の直積位相と, $\mathcal{O}_{X\times Y}$ から定まる相対位相は一致することを示せ.

問 76. $(X_1, \mathcal{O}_1)$, $(X_2, \mathcal{O}_2)$ を位相空間, $(X_1 \times X_2, \mathcal{O}_{X_1\times X_2})$ をその直積空間とする. また, $i = 1, 2$ に対して, $p_i : X_1 \times X_2 \to X_i$ を射影とする. 次が成り立つことを示せ.

(1) 射影 $p_i : (X_1 \times X_2, \mathcal{O}_{X_1\times X_2}) \to (X_i, \mathcal{O}_i)$ はすべて連続かつ開写像である.

(2) $\mathcal{O}$ を $X_1 \times X_2$ 上の位相とする. このとき, 射影 $p_i : (X_1 \times X_2, \mathcal{O}) \to (X_i, \mathcal{O}_i)$ がすべて連続であるための必要十分条件は, $\mathcal{O}_{X_1\times X_2} \subset \mathcal{O}$ が成り立つことである.

(3) $(Z, \mathcal{O}_Z)$ を位相空間, $f : Z \to X_1 \times X_2$ を写像とする. このとき, $f : (Z, \mathcal{O}_Z) \to (X_1 \times X_2, \mathcal{O}_{X_1\times X_2})$ が連続であるための必要十分条件は, 写像 $p_i \circ f : (Z, \mathcal{O}_Z) \to (X_i, \mathcal{O}_i)$ がすべて連続であることである.

注意： 以下, 特に断らない限り, 位相空間の直積集合には直積位相を入れるものとする.

問 77. X, Y, Z を位相空間, $f : X \times Y \to Z$ を写像とする.

(1) f が連続であるための必要十分条件は, 任意の $(x, y) \in X \times Y$ に対して,

$$\forall V : f(x, y) \text{ の開近傍},\ \exists U_1 : x \text{ の開近傍},\ U_2 : y \text{ の開近傍 s.t. } f(U_1 \times U_2) \subset V$$

が成り立つことであることを示せ.

(2) f は連続であるとする. 点 $y_0 \in Y$ に対して, 写像 $g : X \to Z$ を $g(x) := f(x, y_0)$ で定めると, g は連続であることを示せ.

問 78. $i = 1, 2$ に対して, X_i, Y_i を位相空間, $f_i : X_i \to Y_i$ を連続写像とする. このとき, $F : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ を $F(x_1, x_2) := (f_1(x_1), f_2(x_2))$ で定めると, F は連続写像であることを示せ.

問 79. X, Y を位相空間とし, $A \subset X$, $B \subset Y$ とする. 次が成り立つかどうか調べよ.

(1) $A^\circ \times B^\circ = (A \times B)^\circ$.

(2) $\overline{A} \times \overline{B} = \overline{A \times B}$.

問 80. $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする.

(1) $y_0 \in Y$ に対して, X と直積空間 $X \times \{y_0\}$ は同相であることを示せ.

(2) 直積空間 $X \times Y$ と $Y \times X$ は同相であることを示せ.

問 81. $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする. 次が成り立つかどうか調べよ.

(1) X, Y が連結ならば, $X \times Y$ も連結である.

(2) X, Y が弧状連結ならば, $X \times Y$ も弧状連結である.

(3) X, Y がコンパクトならば, $X \times Y$ もコンパクトである.

(4) X, Y がハウスドルフならば, $X \times Y$ もハウスドルフである.

問 82. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間とし, 写像 Δ を

$$\Delta : X \to X \times X : x \mapsto (x, x)$$

で定める. 次が成り立つことを示せ.

(1) Δ は連続写像である.

(2) X はハウスドルフ空間であるための必要十分条件は, 像 $\Delta(X)$ は $X \times X$ 内の閉集合であることである.

問 83. $\mathbb{R}^n$ を通常のユークリッド空間とする. 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が (線形空間の意味での) 同型写像ならば, f は (位相空間の意味での) 同相写像になることを示せ.

問 84. ユークリッド空間上の標準的な位相やその相対位相を考える.

(1) 直積空間 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^3$ と同相であることを示せ.

(2) 直積空間 $S^1 \times \mathbb{R}$ は円筒 $C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ と同相であることを示せ.

(3) 直積空間 $S^1 \times S^1$ はトーラス

$$T := \{((2 + \cos\alpha)\cos\beta, (2 + \cos\alpha)\sin\beta, \sin\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

と同相であることを示せ:

問 85. $\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^2$ 上の位相は標準的なものとする. $\mathbb{R}$ 上の同値関係 $\sim$ を

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Z}$$

で定め, 商集合 $\mathbb{R}/\sim$ に $\sim$ に関する商位相を入れる.

(1) $\sim$ が $\mathbb{R}$ 上の同値関係であることを確かめよ.

(2) 写像 $f : \mathbb{R}/\sim \to \mathbb{R}^2$ を $f([x]) := (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$ $(x \in \mathbb{R})$ で定める. f が well-defined であること, また連続写像であることを示せ.

(3) $\mathbb{R}/\sim$ と円周 $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ は同相であることを示せ. ただし, S^1 には $\mathbb{R}^2$ の相対位相を入れるものとする.

問 86. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, $\sim$ を X 上の同値関係とし, $(X/\sim, \mathcal{O}_{X/\sim})$ をその商位相空間とする. また, $\pi : X \to X/\sim$ を射影とする. 次が成り立つことを示せ.

(1) 射影 $\pi : (X, \mathcal{O}_X) \to (X/\sim, \mathcal{O}_{X/\sim})$ は連続である.

(2) $\mathcal{O}$ を $X/\sim$ 上の位相とする. このとき, 射影 $\pi : (X, \mathcal{O}_X) \to (X/\sim, \mathcal{O})$ が連続であるための必要十分条件は, $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_{X/\sim}$ が成り立つことである.

(3) $(Z, \mathcal{O}_Z)$ を位相空間, $f : X/\sim \to Z$ を写像とする. このとき, $f : (X/\sim, \mathcal{O}_{X/\sim}) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ が連続であるための必要十分条件は, 写像 $f \circ \pi : (X, \mathcal{O}_X) \to (Z, \mathcal{O}_Z)$ が連続であることである.

注意：以下, 特に断らない限り, 同値関係による商集合には商位相を入れるものとする.

問 87. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, $\sim$ を X 上の同値関係とする. 次が成り立つかどうか調べよ.

(1) X が連結ならば, $X/\sim$ も連結である.

(2) X が弧状連結ならば, $X/\sim$ も弧状連結である.

(3) X がコンパクトならば, $X/\sim$ もコンパクトである.

(4) X がハウスドルフならば, $X/\sim$ もハウスドルフである.

問 88. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, $\sim$ を X 上の同値関係とする. このとき, $X/\sim$ が T_1 空間であるための必要十分条件は, 各同値類 $[x] \subset X$ が閉集合であることであることを示せ.

問 89. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, $\sim$ を X 上の同値関係とする. また,

$$R := \{(x, y) \in X \times X \mid x \sim y\}$$

とおく. R が $X \times X$ 内の閉集合で, 射影 $\pi : X \to X/\sim$ が開写像ならば, $X/\sim$ はハウスドルフ空間であることを示せ.

問 90. X をコンパクト空間, Y をハウスドルフ空間とし, $f : X \to Y$ を全射連続写像とする. X 上の同値関係 $\sim$ を

$$x \sim y \ :\Leftrightarrow \ f(x) = f(y)$$

で定める. このとき, $X/\sim$ と Y は同相であることを示せ.

注意 : 以下, ユークリッド空間上の標準的な位相やその相対位相, 積位相, 商位相を考える.

問 91. $\mathbb{R}$ 上に次で定める同値関係 $\sim$ を入れたとき, 商空間 $\mathbb{R}/\sim$ 上の商位相を具体的に求めよ. 必要ならば, $a \in \mathbb{R}$ の同値類を $[a]$ のように表してよい.

(1) $x \sim y :\Leftrightarrow \exists c > 0 \text{ s.t. } y = cx.$

(2) $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$

問 92. 次が成り立つことを示せ.

(1) 区間 $I := [0, 1] \subset \mathbb{R}$ 上に同値関係 $\sim$ を

$$x \sim x' \quad :\Leftrightarrow \quad x = x' \text{ または } \{x, x'\} = \{0, 1\}$$

で定めると, 商空間 $I/\sim$ は S^1 と同相である.

(2) 区間 $I^2 := [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ 上に同値関係 $\sim$ を

$$(x, y) \sim (x', y') \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x, y) = (x', y') \\ \text{または} \quad x = x' \text{ かつ } \{y, y'\} = \{0, 1\} \\ \text{または} \quad y = y' \text{ かつ } \{x, x'\} = \{0, 1\} \end{cases}$$

で定めると, 商空間 $I^2/\sim$ はトーラス T と同相である.

問 93. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ 上に同値関係 $\sim$ を

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad \exists c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ s.t. } y = cx$$

で定める. このとき, 商空間 $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})/\sim$ を $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ と表す.

(1) $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ がコンパクトであることを示せ.

(2) $\mathbb{R}\mathrm{P}^1$ がハウスドルフであることを示せ.

問 94. $S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ とおく. 写像 $\varphi : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \to \mathbb{R}^2$ を

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) := \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}\right)$$

で定める. このとき, φ が同相写像であることを示せ.