数学通論 II 演習・小テスト　No. 1　(2019/10/03)

1. X, Y を集合, $f : X \to Y$ を写像とする.

(1) X の部分集合族 $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ に対して, $(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$ が成り立つことを示せ.

証明： ［示すこと：$\forall x \in X,\ x \in (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$. ］
$\forall x \in X$ をとる.

$$
\begin{aligned}
x \in (\textstyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c \quad &\Leftrightarrow \quad \neg\,(x \in \textstyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) \\
&\Leftrightarrow \quad \neg\,(\exists \lambda \in \Lambda \text{ s.t. } x \in A_\lambda) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \lambda \in \Lambda,\ \neg\,(x \in A_\lambda) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \lambda \in \Lambda,\ x \in A_\lambda^c \\
&\Leftrightarrow \quad x \in \textstyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c.
\end{aligned}
$$

以上より, $(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$ が示された. □

(2) X の部分集合 A に対して, $f(X) - f(A) \subset f(X - A)$ が成り立つことを示せ. ここで, $C - D := C \cap D^c$ は差集合を表す.

証明： ［示すこと：$\forall y \in f(X) - f(A),\ y \in f(X - A)$. ］
$\forall y \in f(X) - f(A)$ をとる. このとき, $y \in f(X)$ かつ $y \in f(A)^c$.

［**claim**：$y \in f(X - A)$, i.e., $\exists x \in X - A$ s.t. $y = f(x)$. ］

- $y \in f(X)$ より, $\exists x \in X$ s.t. $y = f(x)$ が成り立つ.
- $x \in A$ と仮定すると, $y = f(x) \in f(A)$ となり, $y \in f(A)^c$ に矛盾するので, $x \in A^c$. よって, $x \in X \cap A^c = X - A$ が成り立つ.

以上より, $f(X) - f(A) \subset f(X - A)$ が示された. □

(3) (2) の逆の包含関係は一般には成り立たない. $X = Y = \mathbb{R}$ の場合に, 反例を挙げよ. (証明不要)

解答例： $f(x) = x^2$, $A = [0, \infty)$.

学生番号：　　　　　　　　　　氏名：