数学通論 II 演習・小テスト　No. 2 (2019/10/04)

1. X を集合とする. 写像 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が X 上の距離であることの定義を述べよ.

(D1) $\forall x, y \in X,\ d(x,y) \geq 0$ かつ $(d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$.

(D2) $\forall x, y \in X,\ d(x,y) = d(y,x)$.

(D3) $\forall x, y, z \in X,\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

2. X を集合とし, 写像 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ を

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & (x = y \text{ のとき}) \\ 1 & (x \neq y \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定めると, これは X 上の距離となる (**離散距離**). d が三角不等式 (D3) を満たすことを示せ.

証明： ［示すこと：$\forall x, y, z \in X,\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. ］

$\forall x, y, z \in X$ をとる.

- $d(x,y) + d(y,z) \geq 1$ のとき.

$$d(x,z) \leq 1 \leq d(x,y) + d(y,z)$$

- $d(x,y) + d(y,z) < 1$ のとき. d の定義から, $d(x,y) = d(y,z) = 0$ なので, $x = y$ かつ $y = z$. よって, $x = z$ なので,

$$d(x,z) = 0 = d(x,y) + d(y,z)$$

3. $X = \mathbb{R}$ とし, d を離散距離とする. 次の a ～ d から $(\mathbb{R}, d)$ の開集合をすべて選び, 選択肢で答えよ. (証明不要)

a： $\{0\}$　　b： $(1,2)$　　c： $[3,4]$　　d： $\mathbb{R}$

解答：	a, b, c, d

学生番号：　　　　氏名：