数学通論 II 演習・小テスト　No. 3　(2019/10/10)

1. X を集合, $\mathcal{O}$ を X の部分集合族とする. $\mathcal{O}$ が X の位相であることの定義を述べよ.

(T1) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$.

(T2) $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.

(T3) $O_\lambda \in \mathcal{O}\ (\lambda \in \Lambda) \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.

2. $X := \{1, 2, 3\}$ とし, X の部分集合族 $\mathcal{O}$ を

$$\mathcal{O} := \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

で定める.

(1) $\mathcal{O}$ が位相の定義の (T2), すなわち, “開集合と開集合の共通部分は開集合” を満たすことを示せ. (表を用いて説明してもよい.)

証明：［示すこと：$O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.］

$O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ とする. 各場合で $O_1 \cap O_2$ を求めると,

$O_1 \setminus O_2$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2,3\}$	X
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{1\}$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\emptyset$	$\{1\}$
$\{2,3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{2,3\}$	$\{2,3\}$
X	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2,3\}$	X

となり, いずれの場合も $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$ が成り立つ.

(2) X の部分集合族で, 「(T1), (T2) は満たすが (T3) は満たさない」ような例を 1 つ答えよ. (証明不要)

解答例：$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, X\}$.

学生番号：　　　　　　　　　　氏名：