数学通論 II 演習・小テスト　No. 5　(2019/10/17)

1. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする.

   (1) 点 $x \in X$ が部分集合 $A \subset X$ の「触点」であることの定義を述べよ.

   定義： $\forall O$: x の開近傍 s.t. $O \cap A \neq \emptyset$.

   (2) 部分集合 $A \subset X$ が「閉集合」であることの定義を述べよ. (ただし, 「A の閉包」という用語や記号を用いてはならない.)

   定義： $A^c \in \mathcal{O}$.

2. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, A_1, A_2 を X の閉集合とする. このとき, $A_1 \cup A_2$ も閉集合であることを示せ.

   証明： ［示すこと：$A_1 \cup A_2$: 閉集合, i.e., $(A_1 \cup A_2)^c \in \mathcal{O}$. ］

   A_1, A_2 は閉集合なので, A_1^c, A_2^c は開集合.

   よって, ド・モルガンの定理と位相 (開集合系) の定義より,

   $$(A_1 \cup A_2)^c = A_1^c \cap A_2^c \in \mathcal{O}$$

   が成り立つ. よって, $A_1 \cup A_2$ は閉集合である. $\square$

3. $X := \{1, 2, 3, 4\}$ とし, X 上の位相 $\mathcal{O}$ を

   $$\mathcal{O} := \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, X\}$$

   で定める ($\mathcal{O}$ が X の位相であることは認める).

   (1) X の閉集合をすべて答えよ (答えのみで良い).

   解答： $X, \{2, 3, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2\}, \{2\}, \emptyset$.

   (2) $\{2, 3\}$ の閉包 $\overline{\{2, 3\}}$ を答えよ (答えのみで良い).

   解答： $\overline{\{2, 3\}} = \{2, 3, 4\}$.

学生番号：　　　　　　　　　　　　氏名：