数学通論 II 演習・小テスト　No. 6　(2019/10/18)

1. $(X,\mathcal{O}_X)$, $(Y,\mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする.

   (1) 写像 $f:X\to Y$ が「連続」であることの定義を述べよ.

   定義： $\forall O\in\mathcal{O}_Y,\ f^{-1}(O)\in\mathcal{O}_X$.

   (2) 写像 $f:X\to Y$ が「同相写像」であることの定義を述べよ (ただし, 「連続」という用語を用いてもよい).

   定義： (i) f : 全単射　(ii) f : 連続　(iii) f^{-1} : 連続.

2. $X:=\{1,2,3,4\}$ とし, X 上の位相を

$$\mathcal{O}:=\{\emptyset,\{1\},\{1,2\},\{3,4\},\{1,3,4\},X\}$$

で定める. また, 写像 $f:X\to X$ を

$$f(1)=1,\quad f(2)=1,\quad f(3)=2,\quad f(4)=2$$

で定める. $f:X\to X$ が連続写像であることを定義に従って示せ.

証明： ［示すこと：$\forall O\in\mathcal{O}:\ f^{-1}(O)\in\mathcal{O}$. ］

$\forall O\in\mathcal{O}$ をとる.

- $O=\emptyset$ のとき, $f^{-1}(O)=\emptyset\in\mathcal{O}$.
- $O=\{1\}$ のとき, $f^{-1}(O)=\{1,2\}\in\mathcal{O}$.
- $O=\{1,2\}$ のとき, $f^{-1}(O)=X\in\mathcal{O}$.
- $O=\{3,4\}$ のとき, $f^{-1}(O)=\emptyset\in\mathcal{O}$.
- $O=\{1,3,4\}$ のとき, $f^{-1}(O)=\{1,2\}\in\mathcal{O}$.
- $O=X$ のとき, $f^{-1}(O)=X\in\mathcal{O}$.

よっていずれの場合も $f^{-1}(O)\in\mathcal{O}$ なので, f は連続である.　$\square$

学生番号：　　　　　　　　氏名：