数学通論 II 演習・小テスト　No. 8 　　(2019/10/31)

1. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする.

(1) X の部分集合族 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が X の「開被覆」であることの定義を述べよ.

定義： (i) $\forall \lambda \in \Lambda,\ O_\lambda \in \mathcal{O}$　(ii) $\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda = X.$

(2) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が「コンパクト」であることの定義を述べよ (「開被覆」という用語は用いてもよい).

定義： $\forall\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: X の開被覆, $\exists\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ s.t. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} O_{\lambda_i} = X.$

2. X を無限集合, $\mathcal{O}$ を X 上の位相とし,

「任意の $\lambda \in X$ に対して, 一点集合 $\{\lambda\}$ は $(X, \mathcal{O})$ の開集合である」　$(*)$

が成り立つと仮定する. このとき, $(X, \mathcal{O})$ はコンパクトでないことを示せ.

証明： [示すこと：$\exists\{O_\lambda\}$: X の開被覆 s.t. $\forall\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \bigcup O_{\lambda_i} \neq X$.]

各 $\lambda \in X$ に対して, $O_\lambda := \{\lambda\}$ とおく. すると,

- $(*)$ より, 各 O_λ は X の開集合,
- $\bigcup_{\lambda\in X} O_\lambda = \bigcup_{\lambda\in X}\{\lambda\} = X$

が成り立つので, $\{O_\lambda\}_{\lambda\in X}$ は X の開被覆である.

$\forall\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in X$ をとる. このとき,

- $\bigcup_{i=1}^{n} O_{\lambda_i} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ は有限集合,
- 仮定より X は無限集合

なので, $\bigcup_{i=1}^{n} O_{\lambda_i} \neq X$. よって, $(X, \mathcal{O})$ はコンパクトでない. $\square$

学生番号：　　　　　　　　　　氏名：