数学通論 II 演習・小テスト　No. 9　　(2019/11/08)

1. $(X,\mathcal{O})$ を位相空間とする.

   (1) $(X,\mathcal{O})$ が「非連結」であることの定義を述べよ.

   定義： $\exists O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ s.t. $O_1 \cup O_2 = X,\ O_1 \cap O_2 = \emptyset,\ O_1, O_2 \neq \emptyset.$

   (2) $(X,\mathcal{O})$ が「弧状連結」であることの定義を述べよ.

   定義： $\forall x, y \in X,\ \exists c : [0,1] \to X$: 連続 s.t. $c(0) = x,\ c(1) = y.$

2. 位相空間 X が弧状連結ならば連結であることを示せ. ただし, 閉区間 $[0,1]$ が連結であること, また位相空間 Y が連結であるための必要十分条件が

$$\text{「}Y \text{ から離散位相空間 } \{1,2\} \text{ への全射連続写像が存在しない」} \tag{$*$}$$

であることを用いてもよい.

証明： X が弧状連結であるとする.

X が連結であることを背理法で示す. そこで,

$$\exists f : X \to \{1,2\} : \text{全射かつ連続}$$

が成り立つと仮定する. f は全射なので,

$$\exists x, y \in X \text{ s.t. } f(x) = 1,\ f(y) = 2$$

が成り立つ. X は弧状連結なので, 2 点 x, y に対して,

$$\exists c : [0,1] \to X : \text{連続 s.t. } c(0) = x,\ c(1) = y$$

が成り立つ. このとき, $g := f \circ c$ とおくと, $g : [0,1] \to \{1,2\}$ であり,

- $g(0) = f(x) = 1,\ g(1) = f(y) = 2$ なので, g は全射,
- c, f は連続なので, 合成写像 g も連続.

よって, 閉区間 $[0,1]$ から $\{1,2\}$ への全射連続写像が存在することになるが, これは $[0,1]$ の連結性に矛盾.

したがって, X は連結である. □

学生番号：　　　　　　　　氏名：