数学通論 II 演習・小テスト　No. 10　(2019/11/14)

1. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし, X の閉集合系を $\mathcal{A}$ で表す.

 (1) $(X, \mathcal{O})$ が「T_1 空間」であることの定義を述べよ.

 定義： $\forall x, y \in X\ (x \neq y),\ \exists O_x \in \mathcal{O}$ s.t. $x \in O_x,\ y \notin O_x$.

 (2) $(X, \mathcal{O})$ が「ハウスドルフ空間 (T_2 空間)」であることの定義を述べよ.

 定義： $\forall x, y \in X\ (x \neq y),\ \exists O_x, O_y \in \mathcal{O}$ s.t. $x \in O_x,\ y \in O_y,\ O_x \cap O_y = \emptyset$.

2. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が

$$\forall x, y \in X\ (x \neq y),\ \exists f : X \to [0,1] : \text{連続 s.t. } f(x) = 0,\ f(y) = 1 \qquad (*)$$

を満たすとき, $(X, \mathcal{O})$ はハウスドルフ空間であることを示せ. ただし, $[0,1]$ には $\mathbb{R}$ の標準的な位相からの相対位相を入れるものとする.

証明：

［示すこと：$\forall x, y \in X\ (x \neq y),\ \exists O_x, O_y \in \mathcal{O}$ s.t. $x \in O_x,\ y \in O_y,\ O_x \cap O_y = \emptyset$. ］

$\forall x, y \in X\ (x \neq y)$ をとる.

$(*)$ より,

$$\exists f : X \to [0,1] : \text{連続 s.t. } f(x) = 0,\ f(y) = 1$$

が成り立つ. そこで,

$$O_x := f^{-1}([0, \frac{1}{2})), \qquad O_y := f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$$

とおく. すると,

- $[0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 1]$ は $[0,1]$ の開集合なので, f の連続性から, $O_x, O_y \in \mathcal{O}$.
- $f(x) = 0$ より $x \in f^{-1}([0, \frac{1}{2})) = O_x$ が成り立つ. 同様に, $y \in O_y$.
- $O_x \cap O_y = f^{-1}([0, \frac{1}{2})) \cap f^{-1}((\frac{1}{2}, 1]) = f^{-1}([0, \frac{1}{2}) \cap (\frac{1}{2}, 1]) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

以上より, $(X, \mathcal{O})$ はハウスドルフ空間である. $\square$

学生番号：　　　　　　　　　　氏名：