数学通論 II 演習・小テスト　No. 11（訂正版）　(2019/11/15)

1. X を集合, $\mathcal{O}$ を X の位相とする. また $\mathcal{B}$ を X の部分集合族とする.

   (1) $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ とする. $\mathcal{B}$ が「位相 $\mathcal{O}$ の開基である」ことの定義を述べよ.

   定義：$\forall O \in \mathcal{O}, \exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ s.t. $O = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$.

   (2) $\mathcal{B}$ が「X の開基である (X のある位相の開基になる)」ことの定義を述べよ.

   定義：
$$\begin{cases} \text{(i)} & X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B, \\ \text{(ii)} & \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \forall x \in B_1 \cap B_2, \exists B \in \mathcal{B} \text{ s.t. } x \in B \subset B_1 \cap B_2. \end{cases}$$

2. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, $(A, \mathcal{O}_A)$ をその部分空間 (すなわち A は X の部分集合, $\mathcal{O}_A$ は相対位相) とする. このとき, $\mathcal{B}_X$ が $\mathcal{O}_X$ の開基であるならば, $\mathcal{B}_A := \{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}_X\}$ は $\mathcal{O}_A$ の開基であることを示せ.

証明：［示すこと１：$\mathcal{B}_A \subset \mathcal{O}_A$.］

$\forall B_A \in \mathcal{B}_A$ をとる. $\mathcal{B}_A$ の定義より,

$$\exists B \in \mathcal{B}_X \text{ s.t. } B_A = A \cap B$$

が成り立つ. このとき, $B \in \mathcal{B}_X \subset \mathcal{O}_X$ なので, 相対位相の定義より, $B_A = A \cap B \in \mathcal{O}_A$.

［示すこと２：$\forall O \in \mathcal{O}_A, \exists \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}_A$ s.t. $O = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$.］

$\forall O \in \mathcal{O}_A$ をとる. 相対位相の定義より,

$$\exists O' \in \mathcal{O}_X \text{ s.t. } O = O' \cap A$$

が成り立つ. $\mathcal{B}_X$ は $\mathcal{O}_X$ の開基なので,

$$\exists \mathcal{B}'_X \subset \mathcal{B}_X \text{ s.t. } O' = \bigcup_{B' \in \mathcal{B}'_X} B'$$

が成り立つ. そこで, $\mathcal{B}' := \{B' \cap A \mid B' \in \mathcal{B}'_X\}$ とおく. すると, $\mathcal{B}'_X \subset \mathcal{B}_X$ より $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}_A$ であり,

$$O = O' \cap A = \left(\bigcup_{B' \in \mathcal{B}'_X} B'\right) \cap A = \bigcup_{B' \in \mathcal{B}'_X} (B' \cap A) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$$

が成り立つ.

以上より, $\mathcal{B}_A$ は $\mathcal{O}_A$ の開基である. $\square$

学生番号：　　　　　　　　　　氏名：