数学通論 II 演習・小テスト　No. 12 　　(2019/11/21)

1. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし, X の閉集合系を $\mathcal{A}$ で表す.

   (1) $(X, \mathcal{O})$ が「T_3 空間」であることの定義を述べよ.

   定義： $\forall x \in X, \forall A \in \mathcal{A}\ (x \notin A), \exists O_x, O_A \in \mathcal{O}$ s.t. $x \in O_x,\ A \subset O_A,\ O_x \cap O_A = \emptyset.$

   (2) $(X, \mathcal{O})$ が「T_4 空間」であることの定義を述べよ.

   定義： $\forall A, B \in \mathcal{A}\ (A \cap B = \emptyset), \exists O_A, O_B \in \mathcal{O}$ s.t. $A \subset O_A,\ B \subset O_B,\ O_A \cap O_B = \emptyset.$

2. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が T_3 空間であるとき,

$$\forall x \in X, \forall O : x \text{ の開近傍}, \exists O_x \in \mathcal{O} \text{ s.t. } x \in O_x \subset \overline{O_x} \subset O \tag{$*$}$$

   が成り立つことを示せ. (ヒント：$S, T \subset X$ に対して, $S \cap T = \emptyset \Leftrightarrow S \subset T^c$.)

   証明： ［示すこと：$\forall x \in X, \forall O : x$ の開近傍, $\exists O_x \in \mathcal{O}$ s.t. $x \in O_x \subset \overline{O_x} \subset O$. ］

   $\forall x \in X, \forall O : x$ の開近傍をとる. $A := X \setminus O\ (= O^c)$ とおく. すると,

   - $O \in \mathcal{O}$ より, $A \in \mathcal{A}$,
   - $x \in O$ より $x \notin A$

   が成り立つ. よって, 仮定 (T_3) から,

$$\exists O_x, O_A \in \mathcal{O} \text{ s.t. } x \in O_x,\ A \subset O_A,\ O_x \cap O_A = \emptyset$$

   が成り立つ. このとき,

   - O_x の条件から $x \in O_x$.
   - 閉包の定義から $O_x \subset \overline{O_x}$.
   - $A \subset O_A,\ O_x \cap O_A = \emptyset$ より $O_x \subset (O_A)^c \subset A^c = O$ なので,

$$\overline{O_x} \subset \overline{(O_A)^c} = (O_A)^c \subset O.$$

   以上より, $(*)$ は成り立つ. $\square$

学生番号：　　　　　　　　　氏名：