数学通論 II 演習・小テスト　No. 13　(2019/11/22)

1. $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする.

   (1) $\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y$ (教科書では $\mathcal{O}^*(X \times Y)$) の定義を述べよ.

   定義： $\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y := \{U \times V \mid U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$.

   (2) $\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y$ という記号を用いて, $\mathcal{O}_X$ と $\mathcal{O}_Y$ の直積位相の定義を述べよ.

   定義： $\langle \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y \rangle$. ($\mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y$ を開基とする位相.)

2. $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, $(X \times X, \mathcal{O}_{X \times X})$ をその直積位相空間とする. $(X, \mathcal{O}_X)$ がハウスドルフ空間であるならば,

$$\Delta(X) := \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$$

は $(X \times X, \mathcal{O}_{X \times X})$ 内の閉集合であることを示せ.

証明： $(X, \mathcal{O}_X)$ をハウスドルフ空間とする. $\Delta(X)$ が閉集合であること, すなわち, 補集合 $\Delta(X)^c$ が開集合であることを示す.

［示すこと：$\forall (x, y) \in \Delta(X)^c$, $\exists O \in \mathcal{O}_{X \times X}$ s.t. $(x, y) \in O \subset \Delta(X)^c$.］

$\forall (x, y) \in \Delta(X)^c$ をとる. $\Delta(X)$ の定義より, $x \neq y$. $(X, \mathcal{O}_X)$ はハウスドルフ空間なので,

$$\exists O_x, O_y \in \mathcal{O}_X \text{ s.t. } x \in O_x,\ y \in O_y,\ O_x \cap O_y = \emptyset$$

が成り立つ. $O := O_x \times O_y$ とおく. すると

- $O \in \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_X \subset \mathcal{O}_{X \times X}$ より, $O \in \mathcal{O}_{X \times X}$,
- $x \in O_x$, $y \in O_y$ より $(x, y) \in O_x \times O_y = O$,
- $O_x \cap O_y = \emptyset$ より $O = O_x \times O_y \subset \Delta(X)^c$.

以上より, $\Delta(X)$ は閉集合である. □

学生番号：　　　　　　　　　　　氏名：