カンドル空間上の加群と Lie-山口代数の表現

高橋 宣能

2020.12.17

Overview

1. カンドル上の加群
   - 加群と拡大、加法群対象
2. カンドル空間
   - カンドル演算付きの位相空間、可微分多様体、複素多様体、代数多様体...
   - 正則 s 多様体とLie-山口代数
3. カンドル空間上の加群
   - 正則 s 多様体上の正則な加群と Lie-山口代数の表現
   - 例: $\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \text{の共役類}\right)$ 上の線形な 1 階の加群

プレプリント arXiv:2010.05564

記法

以下、「左から作用する」記法で書く。

Definition

カンドル (quandle) とは、以下を満たす二項演算 $\triangleright$ の与えられた集合 Q.

(1) $q \triangleright q = q$

(2) $q \triangleright (-)$ は全単射

(3) $q \triangleright (r \triangleright s) = (q \triangleright r) \triangleright (q \triangleright s)$

Examples: Conjugation quandle, φ-space

群 G を共役操作

$$g \triangleright h := ghg^{-1}$$

によりカンドルと見たものを $\mathrm{Conj}(G)$ と書く。

共役類の和集合などもカンドル。

G を群、$\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$, H を $G^{\varphi} := \{g \in G \mid \varphi(g) = g\}$ の部分群とする。
$\Rightarrow$ G/H は $xH \triangleright_{\varphi} yH := x\varphi(x^{-1}y)H$ によりカンドル

G が Lie 群で $H \supseteq (G^{\varphi})_0$ (G^{φ} の e での連結成分)
のとき G/H を φ 空間と呼ぶ。

Transitive quandles

Definition

- 自己同型群 $\mathrm{Aut}_{\triangleright}(Q)$
- 内部自己同型群　$\mathrm{Inn}(Q) := \langle s_q \rangle$
- Q が推移的(あるいは「代数的に連結」) とは $\mathrm{Inn}(Q)$ の Q への作用が推移的であること

Proposition

Q が推移的ならば、$q \in Q$ に対して

$$Q \cong (\mathrm{Inn}(Q)/\mathrm{Inn}(Q)_q, \triangleright_\varphi),$$

φ は $\mathrm{Inn}(Q)$ の自己同型 $g \mapsto s_q \circ g \circ s_q^{-1}$.

$(\overline{x} \triangleright_\varphi \overline{y} = \overline{x\varphi(x^{-1}y)} = \overline{xs_q x^{-1} y s_q^{-1}}.)$

Quandle modules

Definition (Andruskiewitsch-Graña, Jackson)

Q 上のカンドル加群とは、以下のような組:

$$((A_x)_{x\in Q}, (\eta_{x,y})_{x,y\in Q}, (\tau_{x,y})_{x,y\in Q}).$$

各 $x \in Q$ に対し A_x は 加法群
$\eta_{x,y} : A_y \to A_{x\triangleright y}$ は同型 ($\forall x, y \in Q$),
$\tau_{x,y} : A_x \to A_{x\triangleright y}$ は準同型 ($\forall x, y \in Q$), ただし

(1) $\eta_{x,y\triangleright z}\eta_{y,z} = \eta_{x\triangleright y,x\triangleright z}\eta_{x,z}$,

(2) $\eta_{x,y\triangleright z}\tau_{y,z} = \tau_{x\triangleright y,x\triangleright z}\eta_{x,y}$,

(3) $\tau_{x,y\triangleright z} = \eta_{x\triangleright y,x\triangleright z}\tau_{x,z} + \tau_{x\triangleright y,x\triangleright z}\tau_{x,y}$,

(4) $\eta_{x,x} + \tau_{x,x} = id_{A_x}$.

Quandle modules(cont.)

$\eta_{x,y} : A_y \to A_{x \triangleright y}$, $\tau_{x,y} : A_x \to A_{x \triangleright y}$

(1) $\underline{\eta_{x,y \triangleright z}\eta_{y,z} = \eta_{x \triangleright y, x \triangleright z}\eta_{x,z}}$,

(2) $\eta_{x,y \triangleright z}\tau_{y,z} = \tau_{x \triangleright y, x \triangleright z}\eta_{x,y}$,

(3) $\tau_{x,y \triangleright z} = \eta_{x \triangleright y, x \triangleright z}\tau_{x,z} + \tau_{x \triangleright y, x \triangleright z}\tau_{x,y}$,

(4) $\eta_{x,x} + \tau_{x,x} = id_{A_x}$.

たとえば (1) は以下の可換性:

$$\begin{tikzcd}
A_z \arrow[r, "\eta_{y,z}"] \arrow[d, "\eta_{x,z}"] & A_{y \triangleright z} \arrow[d, "\eta_{x,y \triangleright z}"] \\
A_{x \triangleright z} \arrow[r, "\eta_{x \triangleright y, x \triangleright z}"] & A_{x \triangleright (y \triangleright z)} = A_{(x \triangleright y) \triangleright (x \triangleright z)}
\end{tikzcd}$$

(2), (3) の項も $A_y \to A_{x \triangleright (y \triangleright z)}$, $A_x \to A_{x \triangleright (y \triangleright z)}$ として考えられるものを尽くしており、それなりに自然な条件。

Quandle modules: Example 1

素朴には次のようなものが考えられる:

- 加法群 A, および
- 「作用」 $\triangleright_A : Q \times A \to A$: Q の元ごとに全単射

で、加法性と以下を満たすもの:

$$x \triangleright_A (y \triangleright_A a) = (x \triangleright y) \triangleright_A (x \triangleright_A a) \qquad x, y \in Q, a \in A.$$

言い換えると、$\mathrm{As}(Q) := \langle g_x \ (x \in Q) \mid g_{x \triangleright y} = g_x g_y g_x^{-1} \rangle$ 上の加群。

($\because$ $t_x := x \triangleright_A (-)$ として $t_x t_y = t_{x \triangleright y} t_x$, すなわち $t_{x \triangleright y} = t_x t_y t_x^{-1}$)

これは、上の定義の特別な場合と考えることができる:

$$\eta_{x,y}(a) := x \triangleright_A a, \qquad \tau_{x,y}(a) := a - (x \triangleright y) \triangleright_A a.$$

Quandle modules: Example 1(cont.)

$$x \rhd_A (y \rhd_A a) = (x \rhd y) \rhd_A (x \rhd_A a) \qquad x, y \in Q, a \in A,$$

$$\eta_{x,y}(a) := x \rhd_A a, \quad \tau_{x,y}(a) := a - (x \rhd y) \rhd_A a.$$

たとえば、条件 (2):

$$\begin{aligned}
\eta_{x,y\rhd z}\tau_{y,z}(a) &= x \rhd (a - (y \rhd z) \rhd_A a) \\
&= x \rhd_A a - x \rhd_A ((y \rhd z) \rhd_A a) \\
&= x \rhd_A a - (x \rhd (y \rhd z)) \rhd_A (x \rhd_A a), \\
\tau_{x\rhd y, x\rhd z}\eta_{x,y}(a) &= \tau_{x\rhd y, x\rhd z}(x \rhd_A a) \\
&= x \rhd_A a - ((x \rhd y) \rhd (x \rhd z)) \rhd_A (x \rhd_A a)
\end{aligned}$$

一般に、群 G 上の加群 A とカンドル準同型 $f : Q \to \mathrm{Conj}(G)$ ($\Leftrightarrow$ 群準同型 $\mathrm{As}(Q) \to G$) について

$$\eta_{x,y} := f(x), \quad \tau_{x,y} := 1 - f(x \rhd y)$$

で Q 上の加群が定まる。(上は $G = \mathrm{As}(Q)$ の場合)

Quandle modules(cont. 2)

- (ある種の) 代数 T 上の加群 (T の表現) は、$T \oplus V$ 上の代数としての構造で、T を部分代数、V をイデアルとし、V 上で演算が 0 であるものと対応すべき (Eilenberg)
- 代数系 T 上の加群は T 上の「加法群対象」と対応すべき (Beck 加群)

例: 可換環 R 上の加群 M に対し、$\tilde{R} := R \oplus M$ 上で

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) := (r_1 r_2, r_1 m_2 + r_2 m_1)$$

と定めると $\tilde{R}$ は可換環。

R は $\tilde{R}$ の部分環、M は $\tilde{R}$ のイデアル。

Quandle modules(cont. 3)

群 G 上の加群 M に対し、$\tilde{G} := G \times M$ 上で
$$(g_1, m_1)(g_2, m_2) := (g_1 g_2, m_1 + g_1 m_2)$$
と定めると $\tilde{G}$ は群。

射影 $\Pi : \tilde{G} \to G$ は群準同型: $\tilde{G}$ を「G 上の群 (G への準同型が与えられた群)」と見る。

「ファイバー毎の加法」$A : \tilde{G} \times_G \tilde{G} \to \tilde{G}$ も群準同型。ただし、
$$\tilde{G} \times_G \tilde{G} = \{(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2) \in \tilde{G} \times \tilde{G} \mid \Pi(\tilde{g}_1) = \Pi(\tilde{g}_2)\}.$$
これは $G \times M \times M$ と同一視でき、群演算は
$$(g_1, m_1, m_1')(g_2, m_2, m_2') = (g_1 g_2, m_1 + g_1 m_2, m_1' + g_1 m_2'),$$
また $A(g, m, m') = (g, m + m')$ と定義される。

「零元」$Z : G \to \tilde{G}$, 「ファイバー毎の逆元を取る写像」$I : \tilde{G} \to \tilde{G}$ をあわせて、$(\tilde{G}, \Pi, Z, A, I)$ は

「G 上の群の圏における加法群対象」

Quandle modules(cont. 4)

カンドル Q 上の加群 $((A_x)_{x\in Q}, (\eta_{x,y})_{x,y\in Q}, (\tau_{x,y})_{x,y\in Q})$ に対し、
$\mathcal{A} := \coprod_{x\in Q} A_x$ とおき、$a \in A_x$ を (x, a) と書く。

$$(x, a) \triangleright (y, b) := (x \triangleright y, \eta_{x,y}(b) + \tau_{x,y}(a)).$$

と定めると $\mathcal{A}$ はカンドル、Q への射影はカンドル準同型。
またファイバー毎の和 (等) もカンドル準同型。

この対応は、

- 「カンドル Q 上の加群の圏」と
- 「Q 上のカンドルの圏における加法群対象の圏」

の同値を与える。

前に与えた「群上の加群 $\mapsto$ カンドル上の加群」はこのような対応を通して得られるもの。

Quandle spaces

Definition

位相カンドル (resp. smooth quandle, quandle variety) とは、位相空間 (resp. C^∞ 多様体、代数多様体) Q と演算 $\triangleright : Q \times Q \to Q$ の組で、以下を満たすもの。

(1) $q \triangleright q = q$,

(2) $Q \times Q \to Q \times Q; (q, r) \mapsto (q, q \triangleright r)$ は同相 (resp. 微分同相、双正則),

(3) $q \triangleright (r \triangleright s) = (q \triangleright r) \triangleright (q \triangleright s)$.

Examples

- 位相群/Lie 群/代数群 G に対し、$\mathrm{Conj}(G)$.
- G, H, φ を位相群 etc. として、$(G/H, \triangleright_\varphi)$.

Regular s-manifolds

正則 s 多様体とは

- (C^∞ 級、複素解析的、代数) 多様体 Q
- Q 上の C^∞ 級の (resp. 複素解析的、正則) 演算 $\triangleright$

の組で、カンドルの公理と以下を満たすもの:

$$\forall q \in Q, \quad 1 - d_q s_q \in \mathrm{End}(T_q Q) \text{ は可逆 } (s_x(y) := x \triangleright y).$$

- 対称空間は正則 s 多様体
- 正則 s 多様体は「簡約等質空間」

Example

$\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ において、行列 A の共役類 Q_A は、共役演算

$$X \triangleright Y := XYX^{-1}$$

によりカンドル多様体。特に、$\mathrm{diag}(\alpha,\beta) := \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ に対し $Q_{\mathrm{diag}(\alpha,\beta)} = Q_{\alpha,\beta}$ と書くと、$\alpha \neq \beta$ のとき

正則 s 多様体: $\mathrm{diag}(\alpha,\beta)$ での接空間の基底として

$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ が取れ、

$$d_A s_A(E) = AEA^{-1} = \alpha\beta^{-1}E, \quad d_A s_A(F) = \beta\alpha^{-1}F$$

$Q_{\alpha,\beta} \xrightarrow{\sim} Q_{\lambda\alpha,\lambda\beta}; X \mapsto \lambda X$ がわかる

$\rightsquigarrow \quad Q_\alpha := Q_{\alpha,\alpha^{-1}}$ を考える。

Regular s-manifolds are homogeneous

Theorem (Fedenko, Kowalski (1970's))

Q が連結な正則 s 多様体のとき、

1. Q は推移的である。
2. Q は φ 空間である。すなわち、ある *Lie* 群 G, $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$, $H \subseteq G^{\varphi}$ に対して $Q \cong (G/H, \triangleright_{\varphi})$.
3. $x \in Q$ に対し接空間 $T = T_x Q$ は*Lie-山口代数*の構造を持ち、また自己同型 $\sigma = d_x s_x$(で、ある条件を満たすもの) がある。
   Q は局所的に (T, σ) で定まる。

より一般に、連結で推移的な smooth quandle や quandle variety (標数 0) はほぼ φ 空間 (smooth: Katsumi Ishikawa, algebraic: T.)

Lie-Yamaguti algebra

Definition

Lie-山口代数とは、ベクトル空間 T と双線形・三重線形な演算

$$(x, y) \mapsto x * y, \qquad (x, y, z) \mapsto [x, y, z]$$

の組で、以下を満たすもの。

- $x * x = 0$, $[x, x, y] = 0$.
- $\mathcal{C}([x, y, z] + (x * y) * z) = 0$ (1st Bianchi identity),
  $\mathcal{C}$ は x, y, z についての巡回和。
- $\mathcal{C}[x * y, z, w] = 0$ (2nd Bianchi identity).
- $z \mapsto [x, y, z]$ は $*$, $[\ ]$ に関する derivation.

Lie-Yamaguti algebra

Definition

無限小 s 多様体とは、Lie-山口代数 $(T, *, [\ ])$ とその自己同型 σ で

- $[\sigma(x), \sigma(y), z] = [x, y, z]$
- $1 - \sigma$ は可逆

を満たすもの。

(前の定理の「ある条件」とはこれ。)

Example

$Q_\alpha(= (\mathrm{diag}(\alpha, \alpha^{-1})$ の共役類$))$ に対する無限小 s 多様体 T は:

- $\dim_{\mathbb{C}} T = 2, \quad T = \langle E, F\rangle$.
- $E * E = E * F = F * E = F * F = 0$
- $[E, E, \bullet] = [F, F, \bullet] = 0.$
- $[E, F, E] = 2E, \quad [E, F, F] = -2F, \quad [F, E, \bullet] = -[E, F, \bullet]$.
- $\sigma(E) = \alpha^2 E, \quad \sigma(F) = \alpha^{-2} F$.

これは、$Q_\alpha = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\{\det = 1$ の対角行列 $\}$ と書けることから、$sl(2, \mathbb{C}) = T \oplus \mathfrak{h}$, $T = \langle E, F\rangle$, $\mathfrak{h} = \langle H\rangle$ と分解し、$X, Y, Z \in T$ に対して

$$X * Y = [X, Y]_T, \quad [X, Y, Z] = [[X, Y]_{\mathfrak{h}}, Z]$$

などとしたもの。

Modules on a quandle space

Q: 位相カンドル/smooth quandle/quandle variety

Definition

Q 上の (線形)カンドル加群とは、次のような組 $(\mathcal{A}, \eta, \tau)$:

$\mathcal{A}$　Q 上のベクトル束や連接層
$\eta : p_2^* \mathcal{A} \to \mu^* \mathcal{A}$　$Q \times Q$ 上の同型
$\tau : p_1^* \mathcal{A} \to \mu^* \mathcal{A}$　$Q \times Q$ 上の準同型、ただし以下を満たす:

(1) $(p_1, \mu_{23})^* \eta \circ p_{23}^* \eta = (\mu_{12}, \mu_{13})^* \eta \circ p_{13}^* \eta$

(2) $(p_1, \mu_{23})^* \eta \circ p_{23}^* \tau = (\mu_{12}, \mu_{13})^* \tau \circ p_{12}^* \eta$

(3) $(p_1, \mu_{23})^* \tau = (\mu_{12}, \mu_{13})^* \eta \circ p_{13}^* \tau + (\mu_{12}, \mu_{13})^* \tau \circ p_{12}^* \tau$

(4) $\Delta^* \eta + \Delta^* \tau = id_{\mathcal{A}}$　(Δ: 対角写像)

(位相カンドル上: Elhamdadi-Moutuou, コホモロジー: Elhamdadi-Saito-Zappala)

Example

$\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ の標準的表現 $\mathbb{C}^2$ から $Q := \mathrm{Conj}(\mathrm{GL}(2,\mathbb{C}))$ 上の加群 $V = (Q \times \mathbb{C}^2, \eta, \tau)$ が

$$\eta_{XY}(\boldsymbol{v}) = X\boldsymbol{v}, \quad \tau_{XY}(\boldsymbol{v}) = (1 - XYX^{-1})(\boldsymbol{v})$$

で定まる。これから定まる $Q \times \mathbb{C}^2$ 上のカンドル演算は $\left\{\begin{pmatrix} X & \boldsymbol{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ 上の conjugation と同じ:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} X & \boldsymbol{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y & \boldsymbol{w} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & \boldsymbol{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} X & \boldsymbol{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y & \boldsymbol{w} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X^{-1} & -X^{-1}\boldsymbol{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} X & \boldsymbol{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} YX^{-1} & \boldsymbol{w} - YX^{-1}\boldsymbol{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} XYX^{-1} & \boldsymbol{v} + X(\boldsymbol{w} - YX^{-1}\boldsymbol{v}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} XYX^{-1} & \eta_{XY}(\boldsymbol{w}) + \tau_{XY}(\boldsymbol{v}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Example(cont.)

$Q_\alpha = \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \text{の共役類} \right)$ 上の加群 $\mathcal{S}_\lambda$ が

$$Q_\alpha \cong Q_{\lambda\alpha, \lambda\alpha^{-1}} \subseteq \mathrm{Conj}(\mathrm{GL}(2, \mathbb{C}))$$

で引き戻すことにより得られる:

$$(\mathcal{S}_\lambda)_X = \mathbb{C}^2$$
$$\eta_{XY}(\boldsymbol{v}) = \lambda X \boldsymbol{v}, \quad \tau_{XY}(\boldsymbol{v}) = (1 - \lambda XYX^{-1})(\boldsymbol{v})$$

ここまでのまとめ:

カンドル上の加群: $((A_x), (\eta_{xy}), (\tau_{xy}))$. $\mathcal{A} := \coprod A_x$ 上

$$(x, a) \triangleright (y, b) := (x \triangleright y, \tau_{xy}(a) + \eta_{xy}(b))$$

として、カンドルのある種の拡大に対応

正則 s 多様体: 特に性質の良いカンドル空間

- 正則 s 多様体は「無限小 s 多様体」と対応 (Lie-山口代数 + ある条件を満たす自己同型)

正則 s 多様体上の加群は?

Representations of Lie-Yamaguti algebra

Definition (山口, 1969)

Lie-山口代数 T の表現とは、ベクトル空間 V と線形/双線形写像 $\rho : T \to \mathrm{End}(V)$, $\theta : T \times T \to \mathrm{End}(V)$ の組で以下を満たすもの ただし $\delta(x, y) := [\rho(x), \rho(y)] - \rho(x * y) - (\theta(x, y) - \theta(y, x))$.

- $\theta(x, y * z) = \rho(y)\theta(x, z) - \rho(z)\theta(x, y)$,
  $\theta(x * y, z) = \theta(x, z)\rho(y) - \theta(y, z)\rho(x)$,
- $\theta(z, w)\theta(x, y) - \theta(y, w)\theta(x, z) - \theta(x, [y, z, w]) + \delta(y, z)\theta(x, w) = 0$,
- $[\delta(x, y), \rho(z)] = \rho([x, y, z])$,
- $[\delta(x, y), \theta(z, w)] = \theta([x, y, z], w) + \theta(z, [x, y, w])$.

T の表現は、T の abelian ideal による split extension に対応。

Quandle modules on regular s-manifolds

Definition

無限小 s 多様体 $(T, *, [\,], \sigma)$ の表現とは、T の表現 V と $\psi \in \mathrm{GL}(V)$ の組 (V, ψ) で

- $\rho(\sigma(x)) = \psi \circ \rho(x) \circ \psi^{-1}$
- $\theta(x, \sigma(y)) = \psi \circ \theta(x, y),\ \ \theta(\sigma(x), y) = \theta(x, y) \circ \psi^{-1}$

を満たすもの (σ との「可換性」$+\alpha$)。

(有限次元の) 表現が正則: $1 - \psi$ が可逆

Definition

正則 s 多様体上の加群 $(\mathcal{A}, \eta, \tau)$ が正則とは、
$id_{\mathcal{A}_x} - \eta_{x,x} : \mathcal{A}_x \to \mathcal{A}_x$ が可逆であること。

Quandle modules on regular s-manifolds(2)

Theorem

Q を正則 s 多様体、$q \in Q$ とするとき、
Q 上の正則なカンドル加群 $(\mathcal{A}, \eta, \tau)$ から
$(T_q Q, d_q s_q)$ の正則な表現 $(\mathcal{A}_q, \eta_{qq})$ が定まる。
この対応は忠実な関手。

Q が連結かつ単連結な (*smooth* または複素解析的)
正則 s 多様体ならば、同値関手。

証明:

- 正則な加群と「Q 上の正則 s 多様体の圏におけるベクトル空間対象」の対応
- 正則な表現と「abelian ideal による split extension」の対応

および次の対応 (+ もう少し議論) を用いる。

Quandle modules on regular s-mfds(4)

Proposition (Fedenko?)

Q, Q' を正則 s 多様体、Q は単連結、$x \in Q$, $x' \in Q'$ とするとき、以下の集合に一対一対応がある:

- { 準同型 $f : Q \to Q'$ で $f(x) = x'$ となるもの }
- { 無限小 s 多様体の準同型
$$(T_xQ, d_xs_x) \to (T_{x'}Q', d_{x'}s_{x'})\}.$$

$Q \to Q'$ が全射ならば $\mathrm{Inn}(Q) \to \mathrm{Inn}(Q')$ があるが、一般にはもう少し複雑。

Examples

$Q_\alpha(= (\mathrm{diag}(\alpha, \alpha^{-1})$ の共役類)) 上の線形な rank 1 加群を考える。
ただし $\alpha^4 \neq 1$ とする。

対応する無限小 s 多様体 (T, σ) の 1 次元表現 $(\mathbb{C}, \rho, \theta, \psi)$ は⋯

- $(\mathbb{C}, \rho, \theta)$ は T の表現、$\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は線形同型
- $\rho(\sigma(x)) = \psi \circ \rho(x) \circ \psi^{-1}$
- $\theta(x, \sigma(y)) = \psi \circ \theta(x, y),\ \ \theta(\sigma(x), y) = \theta(x, y) \circ \psi^{-1}$

$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ として $T = \langle E, F \rangle$, $\sigma(E) = \alpha^2 E, \sigma(F) = \alpha^{-2} F$

ψ, $\rho(E)$ などはスカラーと考えられるから

$$\rho(\sigma(E)) = \psi \circ \rho(E) \circ \psi^{-1} = \rho(E),$$

左辺は $\alpha^2 \rho(E)$ だから $\rho(E) = 0$. 同様に考えて $\rho \equiv 0$.
同様にして、$\theta(E, E) = \theta(F, F) = 0$.

Examples

$\alpha^4 \neq 1$, $(\mathbb{C}, \rho, \theta)$ は T の表現、$\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は線形同型、

- $\rho(\sigma(x)) = \psi \circ \rho(x) \circ \psi^{-1}$
- $\theta(x, \sigma(y)) = \psi \circ \theta(x, y)$, $\theta(\sigma(x), y) = \theta(x, y) \circ \psi^{-1}$

$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ として $T = \langle E, F \rangle$, $\sigma(E) = \alpha^2 E, \sigma(F) = \alpha^{-2} E$

$$\theta(E, F) = \theta(\sigma(E), F) \circ \psi = \alpha^2 \psi \cdot \theta(E, F)$$

よって $\theta(E, F) = 0$ または $\psi = \alpha^{-2}$.
同様に $\theta(F, E) = 0$ または $\psi = \alpha^2$.

Examples

Lie-山口代数の表現という条件も使ってゆくと、次のいずれかに同型:

1. $\rho \equiv 0$, $\theta \equiv 0$, $\psi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
2. $\rho \equiv 0$, $\theta(E,E) = \theta(F,F) = \theta(E,F) = 0$, $\theta(F,E) = 1$, $\psi = \alpha^2$.
3. $\rho \equiv 0$, $\theta(E,E) = \theta(F,F) = \theta(F,E) = 0$, $\theta(E,F) = -1$, $\psi = \alpha^{-2}$.

(1) は $Q_\alpha \times \mathbb{C}$ 上で $\eta \equiv \psi$, $\tau \equiv 1 - \psi$ としたものに対応。
$(Q_\alpha \to \mathrm{Conj}(\mathrm{GL}(1,\mathbb{C})); x \mapsto \psi$ に対応、「Alexander 加群」)

Examples

(2) $\rho \equiv 0$, $\theta(E,E) = \theta(F,F) = \theta(E,F) = 0$, $\theta(F,E) = 1$, $\psi = \alpha^2$ に対応する Q_α 上の加群 $\mathcal{A}$ を記述する ((3) は同様)。

前に与えた $\mathcal{S}_\lambda$ で $\lambda = \alpha$ としたもの

$$\begin{aligned} &\mathcal{S}_\alpha = (Q_\alpha \times \mathbb{C}^2, \eta, \tau), \\ &\eta_{XY} = \alpha X, \quad \tau_{XY} = 1 - \alpha XYX^{-1} \end{aligned}$$

を考える (これは正則な加群でない)。

$\mathcal{A} := \{(X, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{S}_\alpha \mid X\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v}\}$ は $\mathcal{S}_\alpha$ の部分加群。

$\rightarrow$ これが (2) の表現に対応。

実は $\mathcal{S}_\alpha$ は完全可約でなく、また $\mathcal{B} := \mathcal{S}_\alpha/\mathcal{A}$ は無限小 s 多様体の表現に対応しない ($\psi = 1$ である表現は trivial だが $\mathcal{B}$ は trivial でない)

また、$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ は $\mathrm{As}(Q_\alpha)$ の表現に対応しない ($\mathrm{As}(Q_\alpha)$ の表現は (1) のもの)