線形代数学演習 II（担当：柳原，TA: 堀田，秋田）

1. 授業の進度により，課題の内容が変更されることがある.
2. 成績は演習問題の解答状況と出席状況（毎回小テストあり）で判断する.
3. 配布した資料はhttp://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~yanagi/PLAII.html にアップするので，受け取っていないものはダウンロードしておくこと.
4. 質問等があれば理学部 C813 に直接来るか，yanagi@math.sci.hiroshima-u.ac.jp にメイルを送ること. 質問に来る場合は，メイルまたは tel.（082-424-7357）であらかじめ連絡をとってもらえると確実.

2007 年度　後期　日程

第1 週: 10 月　3 日「ガイダンス・前期の復習」

第2 週: 10 月 10 日「演習：線形空間」

第3 週: 10 月 17 日（休講）

第4 週: 10 月 24 日「演習：部分空間」

第5 週: 10 月 31 日 「演習：ベクトルの 1 次独立と 1 次従属」

第6 週: 11 月　7日「演習：基底と次元」

第7 週: 11 月 14 日「演習：線形写像」

第8 週: 11 月 21 日「演習：表現行列」

第9 週: 11 月 28 日（休講）

第10 週: 12 月　5 日「演習：基底の変換」

第11 週: 12 月 12 日「演習：内積空間，正規直交基底」

第12 週: 12 月 19 日「演習：直交変換，ユニタリ変換」

第13 週: 1 月　9 日「演習：固有値と固有ベクトル，固有空間」

第14 週: 1 月 16 日「演習：行列の対角化」

第15 週: 1 月 23 日「演習：行列の三角化」

第16 週: 1 月 30 日「演習：エルミット行列の対角化」

平成 19 年度 線形代数学演習 II (水曜 1·2 時限，総科 K305)

この授業では線形代数学 II の講義の理解を深めるために演習を行います．配布された演習問題の解答を作成し，次回授業が始まる前に予め板書しておいて下さい．授業の前半でそれを解説してもらいます．授業の後半は小テストを行い，近くの人と答案を交換して丸付けをして提出してもらいます．これが出席の代わりになります．

この授業の単位を取得するためには**2 問以上**の発表と**十分な回数**の出席が必要になります．また，配布された演習問題の発表は原則次週の授業中のみできます．

1　線形空間

定義．V を空でない集合とする．V が次の性質を満たすとき V を**線形空間**または**ベクトル空間**という．

$(A0)$ 和が定義されている．つまり $^\forall a, b \in V$ に対し $a + b \in V$.

$(A1)$ $^\forall a, b \in V$ に対し $a + b = b + a$.

$(A2)$ $^\forall a, b, c \in V$ に対し $(a + b) + c = a + (b + c)$.

$(A3)$ **零元** $o \in V$ が存在し $^\forall a \in V$ に対し $a + o = o + a = a$ が成り立つ．

$(A4)$ $^\forall a \in V$ に対し $a + a' = a' + a = o$ を満たす a' が存在する．これを $-a$ で表し a の**逆元**という．

$(S0)$ スカラー倍が定義されている．つまり $^\forall c \in \mathbb{R}$ と $^\forall a \in V$ に対し $ca \in V$.

$(S1)$ $^\forall a, b \in V$ と $^\forall c \in \mathbb{R}$ に対し $c(a + b) = ca + cb$.

$(S2)$ $^\forall c, d \in \mathbb{R}$ と $^\forall a \in V$ に対し $(c + d)a = ca + da$.

$(S3)$ $^\forall c, d \in \mathbb{R}$ と $^\forall a \in V$ に対し $(cd)a = c(da)$.

$(S4)$ $^\forall a \in V$ に対し $1a = a$.

注意．以下の問題では $\mathbb{R}$ が線形空間であることを用いてよい.（つまり $V = \mathbb{R}$ としたときの $(A0) \sim (A4), (S0) \sim (S4)$ の性質は用いてよい.）

問 1．上の性質を満たすことを確かめることによって $\mathbb{R}^2$ が線形空間であることを示そう．

(1) $\mathbb{R}^2$ の和を

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

で定義する．このとき明らかに $(A0)$ は成立している．次は $(A1)$ の証明である．次の等号が成り立つ理由を次の選択肢から選べ．但し選択肢を全て使うとは限らない．

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \underset{(ア)}{=} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \underset{(イ)}{=} \begin{pmatrix} y_1 + x_1 \\ y_2 + x_2 \end{pmatrix} \underset{(ウ)}{=} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

選択肢

$\mathbb{R}$ における和の定義　　$\mathbb{R}^2$ における和の定義　　$\mathbb{R}$ において $(A1)$ が成立

(2) 次は $(A2)$ の証明である．前問と同様に等号が成り立つ理由を選択肢から選べ．

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \underset{(ア)}{=} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \underset{(イ)}{=} \begin{pmatrix} (x_1 + y_1) + z_1 \\ (x_2 + y_2) + z_2 \end{pmatrix}$$
$$\underset{(ウ)}{=} \begin{pmatrix} x_1 + (y_1 + z_1) \\ x_2 + (y_2 + z_2) \end{pmatrix} \underset{(エ)}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + z_1 \\ y_2 + z_2 \end{pmatrix} \underset{(オ)}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right)$$

選択肢

$\mathbb{R}$ における和の定義　　$\mathbb{R}^2$ における和の定義　　$\mathbb{R}$ において $(A2)$ が成立

(3) 以下は $\mathbb{R}^2$ の零元が $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ であることを示したものである．同様に等号が成り立つ理由を述べよ．但し $\mathbb{R}$ の零元が 0 であることは用いてよい．

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{(ア)}{=} \begin{pmatrix} x_1 + 0 \\ x_2 + 0 \end{pmatrix} \underset{(イ)}{=} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \underset{(ウ)}{=} \begin{pmatrix} 0 + x_1 \\ 0 + x_2 \end{pmatrix} \underset{(エ)}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

(4) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ の逆元が $\begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ であることを示せ．但し $x \in \mathbb{R}$ の逆元が $-x \in \mathbb{R}$ であることを用いてよい．

(5) $\mathbb{R}^2$ におけるスカラー倍を次で定義する．($(S0)$ は明らかに成り立っている．)

$$c\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{pmatrix}$$

次は $(S1)$ が成り立つことの証明である．等号が成り立つ理由を選択肢から選べ．

$$c\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \underset{(ア)}{=} c\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \underset{(イ)}{=} \begin{pmatrix} c(x_1 + y_1) \\ c(x_2 + y_2) \end{pmatrix} \underset{(ウ)}{=} \begin{pmatrix} cx_1 + cy_1 \\ cx_2 + cy_2 \end{pmatrix}$$
$$\underset{(エ)}{=} \begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cy_1 \\ cy_2 \end{pmatrix} \underset{(オ)}{=} c\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

選択肢

$\mathbb{R}$ における和の定義　　$\mathbb{R}^2$ における和の定義　　$\mathbb{R}$ において $(S1)$ が成立
$\mathbb{R}$ におけるスカラー倍の定義　　$\mathbb{R}^2$ におけるスカラー倍の定義

(6) 前問同様に $\mathbb{R}^2$ において $(S2)$ が成り立つことを示せ．

(7) 同様に $\mathbb{R}^2$ において $(S3)$ と $(S4)$ が成り立つことを示せ．以上のことから $\mathbb{R}^2$ が線形空間であることが証明された．

問 2. V を線形空間とする.

(1) V の零元 o_V は唯一つしか存在しないことを示せ.（ヒント：o_V, o'_V が共に V の零元と仮定して $o_V = o'_V$ を示す.）

(2) $a \in V$ の逆元 $b = -a$ は唯一つしか存在しないことを示せ.（ヒント：前期の問 7 と同様にできる.）

問 3. V を線形空間，$a \in V$，$c \in \mathbb{R}$ とする．また o_V を V の零元とする．次を示せ.

(1) $0a = o_V$ を示せ．つまり $0a$ が V の零元であることを示せ.（ヒント：例えば $(S2)$ において $c = d = 0$ とおいてみる.）

(2) $co_V = o_V$ を示せ.（ヒント：$(A3)$ の $a + o_V = a$ の両辺に c を掛ける.）

(3) $(-1)a = -a$ であることを示せ．ここで $(-1)a$ は a の -1 倍，$-a$ は a の逆元である.（ヒント：$(S2)$ において $d = -c$ とおくと (1) が使える.）

問 4. 区間 $I = [a, b]$ 上で連続な関数の全体 $C(I)$ が線形空間であることを示すことを考える. $f, g \in C(I)$ と $c \in \mathbb{R}$ に対し和 $f + g$ とスカラー倍 cf を

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad (cf)(x) = cf(x) \quad ({}^\forall x \in I)$$

で定義する．このとき $f + g$ と cf が連続関数であることは用いてよい.（証明には ε-δ 論法が必要.）従って $f + g \in C(I)$，$cf \in C(I)$ である.

(1) I 上の関数 f と g が等しいことの定義を次の選択肢の 2 つを使って述べよ.

選択肢

${}^\forall x \in I$	${}^\forall x \in \mathbb{R}$	${}^\exists x \in I$	${}^\exists x \in \mathbb{R}$	$f(x) = g(x)$

(2) 以下は $(A1)$ が成り立つことの証明である．等号が成り立つ理由を述べよ．また，同様に $(A2)$ が成り立つことを示せ.

$$(f+g)(x) \underset{(ア)}{=} f(x) + g(x) \underset{(イ)}{=} g(x) + f(x) \underset{(ウ)}{=} (g+f)(x)$$

(3) $\forall x \in I$ に対し $o(x) = 0$ である関数 $o \in C(I)$ は $C(I)$ の零元であることを示せ.

(4) $f \in C(I)$ の逆元が $g(x) = -f(x)$ であることを示せ.

(5) $(S1), (S2)$ が成り立つことを示せ.

(6) $(S3), (S4)$ が成り立つことを示せ．以上のことから $C(I)$ が線形空間であることが証明された.

コメント. 問 1 と問 4 の集合は共に線形空間であることが分かりました．このように和とスカラー倍ができる集合をまとめて扱うのが線形空間論です．より正確にはこれらの集合に共通の性質やそれから導かれる性質を調べるのが線形代数学や代数学です.

2　部分空間

定義. 線形空間 V の空でない部分集合 W が次の 2 つの条件を満たすとき，W を V の部分空間であるという;

1. 任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$ に対し，$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W$

2. 任意の $\boldsymbol{a} \in W$ と任意のスカラー $c \in \mathbb{R}$ に対して，$c\boldsymbol{a} \in W$

問 5. 上記の W が線形空間となることを示せ.

例. $\mathbb{R}^2$ において，$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| 2x - y = 0 \right\}$ は $\mathbb{R}^2$ の線形部分空間となっている．一方 $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| x - 2y - 2 = 0 \right\}$ は $\mathbb{R}^2$ の線形部分空間ではない.（W_1, W_2 ともに図を書いて確認してみると理解し易いと思います）

問 6. (1) W_1 が $\mathbb{R}^2$ の線形部分空間となっていることを確かめよ.

(2) W_2 が $\mathbb{R}^2$ の線形部分空間でないことを確かめよ.

問 7. W_1, W_2 を線形空間 V の部分空間とするとき，共通部分 $W_1 \cap W_2$ が V の線形部分空間になることを示せ.

問 8. W_1, W_2 ($W_1 \neq W_2$, $W_1 \neq \{\boldsymbol{o}\}$, $W_2 \neq \{\boldsymbol{o}\}$) をそれぞれ $\mathbb{R}^3$ の線形部分空間とする．このとき $W_1 \cup W_2$ が線形部分空間となるような W_1,W_2 の具体例を挙げよ.

問 9. $M(n, \mathbb{R})$ を n 次正方行列全体の作るベクトル空間とする．このとき，次の部分集合は $M(n, \mathbb{R})$ の部分空間となっているかどうか判定せよ.（ヒント：部分空間であるときは部分空間の公理を満たすか確認し，そうでないときは公理を満たさないような具体例を見つけてやります）

(1) 正則行列全体　(2) 対称行列全体　(3) べき零行列全体

(4) 上三角行列全体　(5) 非正則行列全体　(6) 交代行列全体

（これらの行列を知らない人は教科書で調べてみましょう）

問 10. $\mathbb{R}$ 上で連続な関数の全体を $C(I)$ とする（$C(I)$ が線形空間であることは前回の **問 4** で確認しました）．このとき，次の部分集合は $C(I)$ の部分空間となっているかどうか判定せよ.

(1) 単調増加関数の全体　(2) 偶関数の全体　(3) 奇関数の全体

(4) $f'(1) = 0$ となる関数の全体　(5) 有界な関数の全体（三角不等式を使う）

問 11．部分空間の条件 1. と 2. は次の条件 3. と同値である事を示せ.（ヒント：条件 A と条件 B が同値である事を示すには，A から B が導かれる事と B から A が導かれることの両方をいう必要があります）

3. 任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$ と任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対し，$\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} \in W$

3　一次独立と一次従属

定義. 線形空間 V の r 個の元$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_r$ が**一次独立**であるとは，$c_1, c_2, \ldots, c_r \in \mathbb{R}$ に対し

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{o} \Rightarrow (c_1, c_2, \ldots, c_r) = (0, 0, \ldots, 0)$$

が成り立つことを言う．これが成り立たないとき，即ち

$$^{\exists}(c_1, c_2, \ldots, c_r) \neq (0, 0, \ldots, 0) \ \text{ s.t. } c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{o} \qquad (\spadesuit)$$

であるとき，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_r$ は**一次従属**であるという．

問 12. 次の $\mathbb{R}^3$ のベクトルは一次独立か一次従属か答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}_1 = {}^t(1, -2, 1)$，$\boldsymbol{a}_2 = {}^t(3, 1, 0)$

(2) $\boldsymbol{a}_1 = {}^t(2, -1, 0)$，$\boldsymbol{a}_2 = {}^t(1, 0, 3)$，$\boldsymbol{a}_3 = {}^t(-2, 1, 0)$

(3) ４個の任意のベクトル$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4$.（ヒント：$A = (\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4)$ の rank を考えよ.）

問 13. V を線形空間とする．以下の問に答えよ．

(1) １つのベクトル $\boldsymbol{a} \in V$ は $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{o}$ のときに限って一次独立であることを示せ.（ヒント：示すべきことは何かを考えればほぼ明らか．あるいは対偶を示してもよい.）

(2) $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_r \in V$ のうち１つが零ベクトルであれば，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_r$ は一次従属であることを示せ.（ヒント：$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{o}$として ($\spadesuit$) を満たす $c_1, c_2, \ldots, c_r$ を見つける.）

問 14. 線形空間 V の元$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_r$ が一次独立であることと次が同値であることを示せ：$^{\forall}a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_r \in \mathbb{R}$ に対し

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_r\boldsymbol{x}_r = b_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + b_r\boldsymbol{x}_r \ \Rightarrow \ (a_1, \ldots, a_r) = (b_1, \ldots, b_r)$$

（ヒント：必要条件であることと十分条件であることを仮定からきちんと示すこと.）

コメント. 問 14 は V の元 $\boldsymbol{x}$ を一次独立なベクトルの一次結合で表したとき，その表現法が一意であることを示す問題になっています．

問 15. $A \in M_n(\mathbb{R})$，$\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_r \in \mathbb{R}^n$ のとき次の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_r$ が一次従属ならば $A\boldsymbol{a}_1, \ldots, A\boldsymbol{a}_r$ も一次従属.

(2) A が正則行列のとき$\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_r$ が一次独立ならば $A\boldsymbol{a}_1, \ldots, A\boldsymbol{a}_r$ も一次独立.

問 16. $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ はともに零行列でないとする．次を示せ．

(1) A が対称行列，B が交代行列ならば A, B は一次独立.（ヒント：$c_1A + c_2B = O$ の両辺の転置をとってみよう．そして転置をとる前の式と比較すると？）

(2) $\mathrm{tr}(A) = 1$ $\mathrm{tr}(B) = 0$ ならば A, B は一次独立.（ヒント：$\mathrm{tr}(c_1A + c_2B) = c_1\mathrm{tr}(A) + c_2\mathrm{tr}(B)$ に注意.）

定義. $C^1(I) := \{f : I \to \mathbb{R} | f$ は微分可能で導関数 f'が連続関数 $\}$.

問 17. $f, g \in C^1(I)$ とする．次の行列式を考える (これを**ロンスキー行列式**という)：

$$W(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$$

このとき $^\forall x \in I$ に対し $W(x) \neq 0$ ならば $f, g \in C^1(I)$ は一次独立であることを示せ.（ヒント：$c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0$ の両辺を微分すると $c_1 f'(x) + c_2 g'(x) = 0$ となり，次が得られる：

$$\begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$W(x)$ はここで現れている行列の行列式である.）

問 18. 問 17 を用いて $\mathbb{R}$ 上の関数 $\cos x$，$\sin x$ が一次独立であることを示せ.

問 19. V を線形空間とする．次の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}, \boldsymbol{a}_n \in V$ が一次独立のとき$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ も一次独立であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{b}_1 = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{b}_2 = d_1\boldsymbol{a}_1 + d_2\boldsymbol{a}_2$ と表されていて，$\boldsymbol{b}_1$ と$\boldsymbol{b}_2$ が一次独立で，$c_1 d_2 - c_2 d_1 \neq 0$ であるとき$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ は一次独立となることを示せ.
（ヒント：定義どおり $e_1\boldsymbol{b}_1 + e_2\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{o}$とおいて$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ の定義を代入し，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ について整理する．仮定からその係数が 0 になることを用いて $e_1 = e_2 = 0$ となることを導く.）

定義. $C^2(I) := \{f : I \to \mathbb{R} | f$ は 2 階微分可能で f, f', f''が全て連続関数 $\}$

問 20. V を次で定義する.

$$V = \{y \in C^2(\mathbb{R}) | y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 0\}$$

以下の問に答えよ.

(1) $y_1(x) = e^x$，$y_2(x) = e^{2x}$ とおく．$y_1 \in V$ および $y_2 \in V$ を示せ.

(2) y_1 と y_2 は一次独立であることを示せ.

(3) $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ とする．$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ は V の元であることを示せ.

（ヒント：(1),(3) は微分方程式の左辺に代入して $= 0$ が成り立つことを示せばよい．(2) は直接示すか問 17 を用いればよい.）

コメント. 今回は $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ が V の元であることを確認しました．数週間後に習うであろう基底の考え方を使うと，V の元が全てこの形で書けることが分かります．つまり，いくつかの一次独立なベクトルの一次結合で線形空間の全ての元を表すことができるわけです.

注意. 前期の演習でも一次独立と一次従属に関する問題を出題しました．今回はあまり重複しない問題を出題しましたので,（テスト前などで）不安がある人は前期の問題を復習することを勧めます.

4　基底と次元

定義．線形空間 V の元 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ に対し，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ が V の基底であるとは，次の条件を満たす事である;

1. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は1次独立である
2. V の任意のベクトルは $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の1次結合で表すことができる

例．$\mathbb{R}^2$ において $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\mathbb{R}^2$ の基底となっている．一方 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathbb{R}^2$ の基底にはなっていない.（基底は山ほど存在します．ここではその1例です.）

問 21．次の問いに答えよ．

(1) 上記の例がそれぞれ基底になっている事，なっていない事を確かめよ．

(2) $\mathbb{R}^3$ の基底を2組作れ．

定義．線形空間 V の基底を構成するベクトルの個数を V の次元といい，$\dim V$ で表す．

例．上の例で用いたベクトルを再び用いると，$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で張られる線形空間の次元は2である．また $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で張られる線形空間の次元は1である．

問 22．n 次正方行列全体がなすベクトル空間 $M(n, \mathbb{R})$ において，次の部分空間の基底と次元を求めよ.（ヒント：(i, j) 成分だけが1で他は全て0の n 次正方行列 E_{ij} を用いるとよいです）

(1)$M(n, \mathbb{R})$ 自身　(2) 上三角行列の全体　(3) 対角成分が全て0の行列全体

(4) 対角行列全体　(5) 対称行列全体

問 23．実数係数3次多項式（$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ みたいなもの）全体 $P(3, \mathbb{R})$ はベクトル空間をなす．

(1) $P(3, \mathbb{R})$ の部分空間 $W_1 = \{p(x) \mid p(1) = p(2) = 0\}$ の次元を求めよ．

(2) $P(3, \mathbb{R})$ の部分空間 $W_2 = \{p(x) \mid p(2) = p'(2) = 0\}$ の次元を求めよ．

(3) $1, (x-2), (x-2)^2, (x-2)^3$ は $P(3, \mathbb{R})$ の基底となっていることを示せ．

問 24. 実数係数 n 次多項式全体 $P(n,\mathbb{R})$ はベクトル空間をなす.

(1) $a \in \mathbb{R}$ としたとき，$1, (x-a), (x-a)^2, \cdots, (x-a)^n$ は $P(n,\mathbb{R})$ の基底となっていることを示せ.

(2) 多項式 $p(x) \in P(n,\mathbb{R})$ は，(1) の基底に関して次のように表されることを示せ;

$$p(x) = p(a) + \frac{p'(a)}{1!}(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

（ヒント：$p(x)$ を (1) の基底を用いて表し，両辺を微分していきましょう）

定理. W_1, W_2 を $\mathbb{R}^n$ の 2 つの部分線形空間とし，$W_1 + W_2 = \{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \mid \boldsymbol{a} \in W_1, \boldsymbol{b} \in W_2\}$ とする.
このとき

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2).$$

問 25. $\mathbb{R}^3$ において W_1, W_2 それぞれ $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x - y + z = 0 \right\}$, $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| 2x + y - z = 0 \right\}$ と定める．このとき次の問に答えよ.

(1) W_1, W_2 は部分線形空間であることを示し，$\dim W_1, \dim W_2$ を求めよ.

(2) $W_1 \cap W_2$ と $\dim(W_1 \cap W_2)$ を求めよ.

(3) 上記の定理を用いて $\dim(W_1 + W_2)$ を求めよ.

(4) $W_1 + W_2$ を求めよ.

5　線形写像

定義. V, W を線形空間とする．このとき写像 $f : V \to W$ が**線形写像**であるとは次の 2 つが成り立つことを言う．

(i) ${}^\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ に対し $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})$

(ii) ${}^\forall \boldsymbol{a} \in V$ と ${}^\forall c \in \mathbb{R}$ に対し $f(c\boldsymbol{a}) = cf(\boldsymbol{a})$

特に $V = W$ であるとき，f を V 上の**線形変換**という．

問 26. 次の写像は線形変換であるか．線形変換なら証明し，そうでなければ反例を挙げよ．

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ 4x_1 \end{pmatrix}$

(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ 4x_1 + 1 \end{pmatrix}$

注. 上は本来は $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)$ と書くべきだが，このように書かれることが多い．

問 27. V, W を線形空間，$f : V \to W$ を線形写像とする．このとき次を示せ．

(1) $f(\boldsymbol{o}_V) = \boldsymbol{o}_W$．但し $\boldsymbol{o}_V, \boldsymbol{o}_W$ はそれぞれ V, W の零元を表す.（ヒント：$0\boldsymbol{o}_V = \boldsymbol{o}_V$ および線形写像の定義と問 3(1) を利用する.）

(2) ${}^\forall \boldsymbol{x} \in V$ に対し $f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$.（ヒント：問 3(3) と線形写像の定義を利用する.）

問 28. V, W, U を線形写像，$f : V \to W, g : W \to U$ を線形写像とする．このとき $g \circ f : V \to U$ も線形写像であることを示せ.

問 29. 次の写像は線形写像か．線形写像なら証明し，そうでなければ反例を挙げよ．

(1) $\varphi : C^1(\mathbb{R}) \to C^1(\mathbb{R})$，$f \in C^1(\mathbb{R})$ に対し $(\varphi(f))(x) = \frac{d}{dx}f(x)$

(2) $\varphi : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$，$A \in M_2(\mathbb{R})$ に対し $\varphi(A) = |A|$.
（ヒント：前期の問 29 で本質的に同じ問題を出題している.）

(3) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対し $\varphi(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$，但し $A \in M_n(\mathbb{R})$ はある行列とする．

定義. $f : V \to W$ を写像とする．このとき f の**像**$\mathrm{Im}f$，および f の**核**$\mathrm{Ker}f$ を次で定める．

- $\mathrm{Im}f := f(V) = \{\boldsymbol{w} \in W | {}^\exists \boldsymbol{v} \in V \text{ s.t.} f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}\} = \{f(\boldsymbol{v}) \in W | \boldsymbol{v} \in V\}$
- $\mathrm{Ker}f := f^{-1}(\{\boldsymbol{o}_W\}) = \{\boldsymbol{v} \in V | f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}_W\}$

問 30. V, W を線形空間，$f : V \to W$ を線形写像とする．以下の問に答えよ．

(1) $\mathrm{Ker}f$ が V の部分空間であることを示せ.

(2) $\mathrm{Im}f$ が W の部分空間であることを示せ.

定義. $f : V \to W$ を写像とする．このとき次を定義する．

- f が**単射**である :⇔ $^\forall \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ に対し $f(\boldsymbol{v}_1) = f(\boldsymbol{v}_2)$ ならば $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$ となる．
- f が**全射**である :⇔ $W = \mathrm{Im} f$
- f が**同型写像**である :⇔ f が線形かつ全単射（全射かつ単射）

問 31. V, W を線形空間，$f : V \to W$ を線形写像とする．このとき f が単射であることと，$\mathrm{Ker} f = \{\boldsymbol{o}_V\}$ であることが同値であることを示せ．

問 32. V, W を線形空間，$f : V \to W$ を同型写像とする．このとき $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底であるならば，$f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は W の基底になることを示したい．

(1) $f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ が一次独立であることを示せ.（ヒント：$c_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + c_n f(\boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{o}_W$ とおき，線形写像の定義と問 31 を利用する.）

(2) W の任意のベクトル $\boldsymbol{w}$ が $f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ の一次結合で表せることを示せ.（ヒント：f は全単射だから f^{-1} が存在する．$f^{-1}(\boldsymbol{w})$ は V の元だから $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の一次結合で書ける．後は $f(f^{-1}(\boldsymbol{w})) = \boldsymbol{w}$ に注意すれば導ける.）

定理（**次元公式**）. V, W を線形空間，$f : V \to W$ を線形写像とするとき次が成り立つ：

$$\dim V = \dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f$$

例. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$，$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ のとき，

$$\mathrm{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathrm{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$

より $\dim \mathbb{R}^3 = 3$，$\dim \mathrm{Im} f = 2$，$\dim \mathrm{Ker} f = 1$ だから確かに次元公式は成り立っている．

問 33. $\mathrm{sl}_2(\mathbb{R}) = \{A \in M_2(\mathbb{R}) | \mathrm{tr}(A) = 0\}$ とおく．次元公式を用いて，$\dim \mathrm{sl}_2(\mathbb{R}) = 3$ であることを示そう．

(1) $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : A \mapsto \mathrm{tr}(A)$ が線形写像であることを示せ．

(2) $\mathrm{Ker} f = \mathrm{sl}_2(\mathbb{R})$ であることと，次元公式を用いて $\dim \mathrm{sl}_2(\mathbb{R}) = 3$ であることを示せ.（ヒント：明らかに $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$ である．$\dim \mathbb{R} = ?$，$\dim M_2(\mathbb{R}) = ?$）

問 34（広大院・H19・改）. $V = \{X \in M_2(\mathbb{R}) | {}^tX = -X\}$ とおく．以下の問に答えよ．

(1) V は $M_2(\mathbb{R})$ の部分空間で，基底が $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ であることを示せ．

(2) $A \in M_2(\mathbb{R})$ をある行列とし，$f_A : V \to V$ を $f_A(X) = {}^tAXA$ で定める．このとき f_A が線形写像であることを示せ．

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ とおく．ここで a は定数である．$f_A : V \to V$ を (2) で定めたものとする．このとき $\mathrm{Im} f$ の次元 $\dim \mathrm{Im} f$ を求めよ.（ヒント：V の元は基底の定数倍.）

6　表現行列

定義. ある線形写像 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ が与えられたとする．$\mathbb{R}^n$ の標準基底を $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n\}$ とし，各 $\boldsymbol{e}_i$ の f による像を

$$f(\boldsymbol{e}_1)=\boldsymbol{a}_1,\quad f(\boldsymbol{e}_2)=\boldsymbol{a}_2,\quad \cdots,\quad f(\boldsymbol{e}_n)=\boldsymbol{a}_n$$

とおく．ここで

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix},\qquad \cdots,\qquad \boldsymbol{a}_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}$$

である．すると $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ を横に並べた (m,n) 行列

$$A\ =\ (\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$$

が得られる．この行列 A を用いると，任意の $\mathbb{R}^n$ の元 $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n$ に対しその f による像を，A を用いて

$$f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}\tag{1}$$

のように表すことができる．この A を **線形写像 f に対応する行列** という．

例. 線形写像 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_3\\x_2\end{pmatrix}$ に対して f に対応する行列は，$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ より，$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ である．

問 35. 上記の例で，任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ に対し $f(\boldsymbol{x})$ が (1) 式のように表される事を示せ．

問 36. 次の写像が線形であることを示し，その対応する行列を求めよ．

(1) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\quad f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_2+x_3\\x_3+x_1\end{pmatrix}$　　(2) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\quad f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-2x_2\\x_2-3x_3\end{pmatrix}$

問 37. 線形写像 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ に対応する表現行列をそれぞれ A,B とする．写像 $f+g$, $kf\ (k\in\mathbb{R})$ をそれぞれ

$$\big(f+g\big)(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x}),\qquad \big(kf\big)(\boldsymbol{x})=k\cdot f(\boldsymbol{x})$$

と定義する．このとき $f+g$, kf に対応する行列はそれぞれ $A+B$, kA となることを示せ．

定義．線形写像 f に対応する行列を一般的な場合について考える．V, W をそれぞれ n 次元，m 次元の実線形空間，$f: V \to W$ を線形写像，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}, \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n\}$ をそれぞれ V, W の基底とする．そのとき V の基底の f による像は W の基底を用いて

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{v}_1) &= a_{11}\boldsymbol{w}_1 + a_{21}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{m1}\boldsymbol{w}_m \\
f(\boldsymbol{v}_2) &= a_{12}\boldsymbol{w}_1 + a_{22}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{m2}\boldsymbol{w}_m \\
&\cdots\cdots \\
f(\boldsymbol{v}_n) &= a_{1n}\boldsymbol{w}_1 + a_{2n}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{w}_m
\end{aligned}$$

のように表される．この $\{a_{ij}\}$ の作る行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

を f の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}, \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n\}$ に関する表現行列という．

問 38．線形写像 $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\quad f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$ の次の基底に関する表現行列を定義に沿って求めよ．

(1) $< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >, < \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} >$ (2) $< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >, < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$

(3) $< \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} >, < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$

問 39．$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像 $f: \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}, \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n\}$ に関する表現行列は $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \cdots, \boldsymbol{w}_n)^{-1} A\, (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n)$ で与えられることを示せ．

問 40．問 39 の結果を用いて次の問いに答えよ．

(1) 線形写像 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 + x_2 \end{pmatrix}$ の基底 $< \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} >, < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} >$ に関する表現行列を求めよ．

(2) 線形変換 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$ の基底 $< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} >$ に関する表現行列を求めよ．(※線形変換の場合は同一の基底に関して考えます)

問 41 実係数の 2 次以下の多項式全体がなすベクトル空間 $P(2,\mathbb{R})$ において，次の線形変換の基底 $< 1,\, x,\, x^2 >$ に関する表現行列を求めよ．

(1) $T_1 : f(x) \mapsto f(x+a)$　　(2) $T_2 : f(x) \mapsto f''(x)$　　(3) $T_3 : f(x) \mapsto e^x \frac{d}{dx}\big(e^{-x} f(x)\big)$

問 42 次の線形同次微分方程式の解全体を V とするとき（V は線形空間となる），V の線形空間 $D : y \mapsto y'$ の与えられた基底 $< y_1, y_2, y_3 >$ に関する表現行列を求めよ．

(1) $y''' - 9y'' + 27y' - 27y = 0,\qquad y_1 = e^{3x},\, y_2 = xe^{3x},\, y_3 = x^2e^{3x}$

(2) $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0,\qquad y_1 = e^{x},\, y_2 = e^{x}\cos x,\, y_3 = e^{x}\sin x$

7　基底の変換

定義. 線形空間 V の 2 組の基底 $\mathbb{E}=\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$，$\mathbb{F}=\{\boldsymbol{f}_1,\ldots,\boldsymbol{f}_n\}$ を考える．$\boldsymbol{f}_i$ は V の元だから

$$\begin{array}{lllllllll} \boldsymbol{f}_1 &=& a_{11}\boldsymbol{e}_1 &+& a_{21}\boldsymbol{e}_2 &+& \cdots &+& a_{n1}\boldsymbol{e}_n \\ \boldsymbol{f}_2 &=& a_{12}\boldsymbol{e}_1 &+& a_{22}\boldsymbol{e}_2 &+& \cdots &+& a_{n2}\boldsymbol{e}_n \\ & & \cdots & & & & & & \\ \boldsymbol{f}_n &=& a_{1n}\boldsymbol{e}_1 &+& a_{2n}\boldsymbol{e}_2 &+& \cdots &+& a_{nn}\boldsymbol{e}_n \end{array}$$

と書ける.（添え字が通常と異なっている点に注意.）このとき

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

を基底 $\mathbb{E}$ から基底 $\mathbb{F}$ への**基底変換の行列**という.

例. $\mathbb{R}^2$ の基底として $\mathbb{E}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$，$\mathbb{F}=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right\}$ をとる．このとき

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} &=& 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} &=& -1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \end{array}$$

であるから，基底 $\mathbb{E}$ から基底 $\mathbb{F}$ への基底変換の行列は $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ である.

問 43. 次で定義される $\mathbb{R}^2$ の基底に対し $\{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\}$ から $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\}$ への基底変換の行列を求めよ.

$$\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

問 44. 次で定義される $M_2(\mathbb{R})$ の基底に対し $\{U_1,U_2,U_3,U_4\}$ から $\{V_1,V_2,V_3,V_4\}$ への基底変換の行列を求めよ.

$$U_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ U_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ U_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ U_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$
$$V_1=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix},\ V_2=\begin{pmatrix}2&1\\0&0\end{pmatrix},\ V_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix},\ V_4=\begin{pmatrix}0&0\\2&1\end{pmatrix}$$

問 45. $\mathbb{R}^n$ において，標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ から別の基底 $\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n\}$ への基底変換の行列を求めよ.（ヒント：上の例をよく見よ．または下の注意を用いよ.）

問 46. 2 次以下の多項式の作る線形空間 $P(2,\mathbb{R})$ の 2 組の基底 $\mathbb{A}=\{1,x,x^2\}$，$\mathbb{A}'=\{1,(x+$

$2),(x+2)^2\}$ について，$\mathbb{A}$ から $\mathbb{A}'$ への基底変換の行列 P を求めよ．

注意．$\mathbb{R}^n$ の 2 組の基底 $\mathbb{E}=\{\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n\}$，$\mathbb{F}=\{\boldsymbol{f}_1,\dots,\boldsymbol{f}_n\}$ について，基底 $\mathbb{E}$ から基底 $\mathbb{F}$ への基底変換の行列 P は

$$(\boldsymbol{f}_1,\dots,\boldsymbol{f}_n)=(\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n)P$$

を満たすことが容易に分かる．逆にこれを満たす P を基底変換の行列と言っても良い．

問 47．$\mathbb{R}^n$ の 3 組の基底 $\mathbb{E}=\{\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n\}$，$\mathbb{F}=\{\boldsymbol{f}_1,\dots,\boldsymbol{f}_n\}$，$\mathbb{G}=\{\boldsymbol{g}_1,\dots,\boldsymbol{g}_n\}$ について，基底 $\mathbb{E}$ から基底 $\mathbb{F}$ への基底変換の行列を P，基底 $\mathbb{F}$ から基底 $\mathbb{G}$ への基底変換の行列を Q としたとき，基底 $\mathbb{E}$ から基底 $\mathbb{G}$ への基底変換の行列は PQ であることを示せ.（上の注意を利用してよい.）

問 48．$\mathbb{R}^n$ の 2 組の基底 $\mathbb{E}=\{\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n\}$，$\mathbb{F}=\{\boldsymbol{f}_1,\dots,\boldsymbol{f}_n\}$ に対し，基底 $\mathbb{E}$ から基底 $\mathbb{F}$ への基底変換の行列を P としたとき，基底 $\mathbb{F}$ から基底 $\mathbb{E}$ への基底変換の行列は P^{-1} であることを示せ.（ヒント：前問を利用できる.）

問 49．$\mathbb{R}^n$ の 2 組の基底 $\mathbb{A}=\{\boldsymbol{a}_1,\dots,\boldsymbol{a}_n\}$，$\mathbb{B}=\{\boldsymbol{b}_1,\dots,\boldsymbol{b}_n\}$ に対し，基底 $\mathbb{A}$ から基底 $\mathbb{B}$ への基底変換の行列を求めよ.（ヒント：問 45 を用いて標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n\}$ からそれぞれの基底への基底変換の行列を求め，問 47，48 を用いる.）

問 50．$\mathbb{R}^3$ の 2 組の基底 $\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$，$\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ に関する基底変換の行列を求めよ.（ヒント：問 49 を用いよ.）

問 51．$\mathbb{R}^2$ のある基底を $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ とする．$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$ が $\boldsymbol{x}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ と表されているとき，$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{x}$ の基底 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ に関する成分という．

(1) 基底 $\mathbb{E}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ から基底 $\mathbb{F}=\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right\}$ に関する基底変換の行列 P とその逆行列 P^{-1} を求めよ．

(2) 基底 $\mathbb{E}$ に関する成分が $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ である $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$ の基底 $\mathbb{F}$ に関する成分はどのようになるか.（ヒント：次の関係式

$$(\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)P,\quad \boldsymbol{x}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

に注意せよ.）

(3) 変数変換 $X=\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y$，$Y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y$ を考える．このとき x,y を X,Y で表せ．

(4) (3) で求めた x,y を $13x^2+6\sqrt{3}xy+7y^2=16$ に代入して整理せよ．これより X-Y 平面ではこの図形は何であるか？

コメント１．上で見たように基底の変換は変数変換と関係があります．つまり，線形空間 V の 2 組の基底を $\mathbb{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$，$\mathbb{F} = \{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n\}$，$\mathbb{E}$ から $\mathbb{F}$ への基底変換の行列を P，さらに $\boldsymbol{v} \in V$ の基底 $\mathbb{E}$ に関する成分を $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，基底 $\mathbb{F}$ に関する成分を $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ としたとき

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

という関係が成り立ちます.（前のページの注意と比較せよ.）

コメント２．さらに問 51 の P は前期の演習で触れたように $-\pi/3$ の回転を表します．従ってこの場合，基底を変換することは，座標軸を回転させることに相当します.

問 52．$\mathbb{R}^n$ の 2 組の基底を $\mathbb{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$，$\mathbb{E}' = \{\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n\}$ とし，$\mathbb{R}^m$ の 2 組の基底を $\mathbb{F} = \{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m\}$，$\mathbb{F}' = \{\boldsymbol{f}'_1, \ldots, \boldsymbol{f}'_m\}$ とする．また $\mathbb{E}$ から $\mathbb{E}'$ への基底変換の行列を P，$\mathbb{F}$ から $\mathbb{F}'$ への基底変換の行列を Q とする．さらに線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の基底 $\mathbb{E}, \mathbb{F}$ に関する表現行列を A とする．このとき基底 $\mathbb{E}', \mathbb{F}'$ に関する表現行列を求めよ.

（ヒント：f が線形写像なので $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = (\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n)P^{-1}$ から $(f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)) = (f(\boldsymbol{e}'_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}'_n))P^{-1}$ が導かれる．このことを用いてよい.）

問 53．$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ を $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix}$ で定まる線形写像とするとき，f の $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ の基底 $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ に関する表現行列を求めよ.

問 54．次で定義される線形変換を考える.

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 2x_2 + 2x_3 \\ 3x_3 \end{pmatrix}$$

(1) 標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ に関する f の表現行列 A を求めよ.（注：問 40 (2) と同様，この場合は基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ に関する表現行列を求めよという意味です.）

(2) 次の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ に関する f の表現行列 B を求めよ.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3) $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ から $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ への基底変換の行列 P を求め，$B = P^{-1}AP$ を示せ.（ヒント：$PB = AP$ および $|P| \neq 0$ を示してもよい.）

コメント．基底をうまく選んで並べると表現行列が対角行列になることがあります．これを利用するのが行列の対角化です．この演習でも後ほど取り上げます.

8　内積空間，正規直交基底

定義. 実線形空間 V の 2 つのベクトル $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ に対して実数 $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$ が定まり次のような性質を満たすとき，$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$ を V の内積という.

1. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \ = \ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$
2. $(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) \ = \ (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}) \ + \ (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b})$
3. $(k\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \ = \ k(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \qquad (k \in \mathbb{R})$
4. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \ \geq \ 0$，等号は $\boldsymbol{a} = 0$ のときに限る.

内積が定義された線形空間を **内積空間** という.

注意 1. V が複素線形空間のときは条件 1. の代わりに $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\overline{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}})$ を，3. の代わりに $(c\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = c(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})(c \in \mathbb{C})$ を採用します（ここで $\overline{z}$ は z の複素共役）.

注意 2. $\mathbb{R}^n$ の任意の元 $\boldsymbol{a} = (a_i),\ \boldsymbol{b} = (b_i)$ に対して $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

と定義するとこれは内積となる．このように定義された内積を **標準内積** と呼びます.

問 55. 内積の定義から

5. $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{0}) = 0$
6. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$
7. $(k\boldsymbol{a}, l\boldsymbol{b}) = k\bar{l}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \qquad (k, l \in \mathbb{C})$

が成り立つ事をそれぞれ示せ.

定義. 線形空間 V の元 $\boldsymbol{a}$ に対して，$||\boldsymbol{a}|| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$ を $\boldsymbol{a}$ の **長さ** または **ノルム** という（標準内積に対して定義されたノルムはよく知られている直感的な意味での「長さ」になります）.

問 56. 複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^2$ のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ に対して $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}) = a_1\overline{b_1} - ia_1\overline{b_2} + ia_2\overline{b_1} + 3a_2\overline{b_2}$$

とおく.

(1) $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は内積である事を示せ.

(2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$ のとき，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}),\ ||\boldsymbol{a}||,\ ||\boldsymbol{b}||$ をそれぞれ求めよ.

定義. 実内積空間の零でないベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ において，シュヴァルツの不等式（教科書 p144）より $-1 \leq (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})/(||\boldsymbol{a}||\,||\boldsymbol{b}||) \leq 1$ であり，つまり

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{||\boldsymbol{a}||\,||\boldsymbol{b}||}$$

を満たすような $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ が唯一つ定まる．この θ を **$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角** という．

問 57. m 行 n 列の行列全体の空間 $M(m, n; \mathbb{R})$ の任意の元 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ に対して

$$(A, B) = \mathrm{tr}({}^t A \cdot B) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$

とおく.

(1) (A, B) は内積であることを示せ.

(2) $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ のとき，(A, B) を求めよ.

(3) (2) で定義した A, B に対して，A と B のなす角 θ を求めよ．但し $0 \leq \alpha - \beta \leq \pi$ とする.

問 58. 級数 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}$ が和を持つ（つまり和が収束する）ような実数列 $\{a_n\}$ 全体がなすベクトル空間を l^2 とする．任意の 2 元 $\{a_n\}, \{b_n\} \in l^2$ に対し

$$(\{a_n\}, \{b_n\}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_k b_k + \cdots$$

とおく.

(1) $(\{a_n\}, \{b_n\})$ が正しく定義されているかを確かめよ.（ヒント：$(\{a_n\}, \{b_n\})$ が ∞ になってしまったらこれは定義としてマズいわけです）

(2) $(\{a_n\}, \{b_n\})$ は内積であることを示せ.

(3) $a_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, $b_n = \left(\dfrac{5}{7}\right)^n$ のとき，$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ のなす角 θ を求めよ.

問 59. 区間 $I = [-1, 1]$ で連続な実数値連続関数全体のなすベクトル空間 $C(I)$ の任意の 2 元 f, g に対して

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx$$

とおく.

(1) (f, g) は内積である事を示せ.

(2) $f(x) = x^2 + ax + b$ のとき，$||f||$ を最小にするような a, b の値を求めよ.

定義. 内積空間 V の $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ の全てが直交している（つまり内積が 0 になっている）とき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ は **直交系** であるという．

さらに $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ 全てが単位ベクトル（ノルムが 1 のベクトル）であるとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_r$ は **正規直交系** であるという．$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が V の基底であるとき，この基底を **正規直交基底** という．

例. $\mathbb{R}^3$ の 3 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ は直交系である．

問 60. 上記の例が直交系である事を確かめ，またそれらを用いて正規直交系を作れ．

定理（グラム-シュミットの直交化法）．n 次元内積空間 V のある基底 $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ から次のようにして V の正規直交基底を構成する事ができる．

1. まず $\boldsymbol{b}_1 = \dfrac{\boldsymbol{a}_1}{||\boldsymbol{a}_1||}$ とおくと，$||\boldsymbol{b}_1|| = 1$ である．
2. $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{b}_1$ とし $\boldsymbol{b}_2 = \dfrac{\boldsymbol{u}_2}{||\boldsymbol{u}_2||}$ とすると，$||\boldsymbol{b}_2|| = 1$, $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = 0$ である．
3. $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{a}_3 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{b}_1 - (\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{b}_2)\boldsymbol{b}_2$ とし $\boldsymbol{b}_3 = \dfrac{\boldsymbol{u}_3}{||\boldsymbol{u}_3||}$ とすると，$||\boldsymbol{b}_3|| = 1$, $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3) = (\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) = 0$ である．
4. この方法を繰り返し，$\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{a}_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_i)\boldsymbol{b}_i$ とし $\boldsymbol{b}_k = \dfrac{\boldsymbol{u}_k}{||\boldsymbol{u}_k||}$ とおけば，この操作により得られたベクトル $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ は V の正規直交基底となる．

（※これらの操作をいきなり全部覚えるのはキツいですが，簡単な問題を 2〜3 問解いてみるとわりとすんなり覚えられると思います）

問 61. 上記の定理について以下の問いに答えよ．

(1) 2. の操作において $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = 0$ となる事を確かめよ．

(2) 3. の操作において $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3) = 0$ となる事を確かめよ．

問 62. 標準内積を入れた内積空間 $\mathbb{R}^2$ の基底 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ に対し，グラム-シュミットの直交化法を用いて正規直交基底を作れ．

問 63. 標準内積を入れた内積空間 $\mathbb{R}^3$ の次の基底に対し，グラム-シュミットの直交化法を用いて正規直交基底を作れ．

(1) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(3) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

9　直交変換とユニタリ変換

定義（再）．${}^t\!AA = E$ を満たす $A \in M_n(\mathbb{R})$ を**直交行列**という．

問 64． $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ は直交行列であることを示せ．

注意．今回の演習問題では $\mathbb{R}^n$ の内積は全て標準内積（演習プリント $p.18$, 注意 2 参照）とします．つまり $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ということです．(右辺はベクトルを $(n,1)$-行列とみなしたときの行列の積である．)

問 65． n 次正方行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n) \in M_n(\mathbb{R})$ について以下の問に答えよ．

(1) A が直交行列ならば $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底である．(ヒント：${}^t\!AA = E$ の左辺を $\boldsymbol{a}_i$ などで表す．)

(2) 逆に $\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底ならば A は直交行列である．(ヒント：${}^t\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j = \delta_{ij}$ に注意せよ．)

問 66． $\mathbb{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\}$，$\mathbb{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の 2 つの正規直交基底とする．このとき $\mathbb{A}$ から $\mathbb{B}$ への基底変換の行列 P は直交行列であることを示せ．(ヒント：問 65 と演習プリント $p.16$ の注意を利用する．)

定義．実内積空間 V 上の線形変換 $f : V \to V$ が

$$(f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b})) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \quad {}^\forall\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$$

を満たすとき f を**直交変換**という．

問 67． V を実内積空間，$f : V \to V$ を V 上の線形変換とする．このとき f が直交変換であることと次が同値であることを示せ．

$$\|f(\boldsymbol{a})\| = \|\boldsymbol{a}\| \quad {}^\forall\boldsymbol{a} \in V$$

(ヒント：直交変換ならば大きさを保つことは $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) = \|\boldsymbol{a}\|^2$ および直交変換の定義から容易に出てくる．逆は次の関係式

$$\|f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\|^2 - \|f(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\|^2 = \|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2$$

を利用せよ．)

問 68． $A \in M_n(\mathbb{R})$ を直交行列とする．このとき $\mathbb{R}^n$ 上の線形変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$が直交変換であることを示せ．

問 69．空間ベクトルの作る線形空間 $\mathbb{R}^3$ の原点を通る平面を π とし，その法線ベクトルを $\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}^3$ とするとき

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \frac{2(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{n}\|^2}\boldsymbol{n}$$

は $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を π に関して $\boldsymbol{x}$ に対称なベクトルに移す変換である．(理由は各自で考えてみよう．) このとき f が直交変換であることを示せ．(この変換を**鏡映**という．)

問 70．実内積空間 V 上の直交変換を $f : V \to V$ とする．このとき f が単射であることを示せ.（ヒント：$\|\boldsymbol{a}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}_V$ と問 31 と今回取り上げた問題を利用すればできる.）

定義（再）．$A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ に対し $A^* = \overline{{}^tA} = (\overline{a_{ji}})$ を A の**随伴行列**という.

定義（再）．$A^*A = AA^* = E$ を満たす $A \in M_n(\mathbb{C})$ を**ユニタリ行列**という.

問 71．ユニタリ行列 U の行列式の絶対値が 1 であることを示せ.

前回の補足．$\mathbb{C}^n$ の任意の元$\boldsymbol{a}= {}^t(a_1, \dots , a_n)$，$\boldsymbol{b}= {}^t(b_1, \dots , b_n)$ に対し $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ を

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{b}} = a_1\overline{b_1} + \cdots + a_n\overline{b_n}$$

で定義すると，これは複素線形空間 $\mathbb{C}^n$ の内積となる．これを**標準内積**という．以下の問題での $\mathbb{C}^n$ のノルムはこの内積で定義されたノルム $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$ を考える.

問 72．$\mathbb{C}^n$ の標準内積について $(A\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{y})$ が成り立つことを示せ.

問 73．$A \in M_n(\mathbb{C})$ がユニタリ行列ならば，任意の $\boldsymbol{x}\in \mathbb{C}^n$ に対し $\|A\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$ であることを示せ.

問 74．V を複素内積空間とし，$\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y}$を V の任意の元とする．このとき次の等式が成り立つことを示せ.（これを**シュワルツの不等式**という.）

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$$

（ヒント：演習プリント $p.18$ の複素内積の定義とノルムの定義に注意せよ．$\|\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{y}\|^2 \geq 0$ (但し t は任意の実数) を用いた方法では証明できない．$\|\boldsymbol{x} + t(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\boldsymbol{y}\|^2 \geq 0$ を利用せよ.）

定義．複素内積空間 V の線形変換 $f : V \to V$ が

$$(f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b})) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \quad {}^\forall\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$$

を満たすとき f を**ユニタリ変換**という.

問 75．$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 & -a+bi \\ a+bi & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ が $\mathbb{C}^2$ のユニタリ変換になるように正の定数 a, b を一組定めよ.

定義．$A^* = A$ を満たす $A \in M_n(\mathbb{C})$ を**エルミート行列**という.

問 76．エルミート行列 H の行列式は実数になることを示せ.

問 77．$A, B \in M_n(\mathbb{C})$ がエルミート行列のとき，AB がエルミート行列であることと $AB = BA$ であることが同値であることを示せ.

問 78．正方行列 $A \in M_n(\mathbb{C})$ が $A = -A^*$ を満たし，$E + A$ が正則ならば $(E - A)(E + A)^{-1}$ はユニタリ行列になることを示せ.（ヒント：$(E + A)(E - A) = (E - A)(E + A)$ に注意.）

10　固有値と固有ベクトル，固有空間

定義. V を一般の n 次複素線形空間．$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底，$f : V \to V$ を線形変換，A を f の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ に関する表現行列とする．このとき，あるベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ と $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在して

$$f(\boldsymbol{x}) \ = \ \lambda \boldsymbol{x} \tag{1}$$

を満たすとき，λ を線形変換 f の **固有値**，$\boldsymbol{x}$ を固有値 λ に対する f の **固有ベクトル** という．

また，(1) を表現行列によって表す事もできる．A の定義より $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ であったので，ある $\boldsymbol{x}$ と λ が存在して

$$A\boldsymbol{x} \ = \ \lambda \boldsymbol{x}$$

を満たすとき，λ を線形変換 f の **固有値**，$\boldsymbol{x}$ を固有値 λ に対する A の **固有ベクトル** という．

解説. (1) の定義を見ても分かるように，固有ベクトルとは線形変換によって長さ（固有値倍）しか変わらないようなベクトルのことである．よく用いられる例として地球の自転がある．地球が 6 時間分自転するような変換を考えてみると，地球の中心から北極または南極に伸びるベクトルはこの変換により向きが変わらないので固有ベクトルとなる．さらに自転によりこのベクトルの大きさは変わらないので，固有値は 1 である．その他のベクトルは向きが変わってしまうので固有ベクトルにはならない．

また，正方形を横に 2 倍だけ引き延ばすような変換を考えると，水平方向または垂直方向のベクトルが固有ベクトルとなる．他のベクトルは向きが変わってしまうので固有ベクトルにはならない．水平方向のベクトルは長さが 2 倍になるので固有値は 2，垂直方向のベクトルは長さは変わらないので固有値は 1 である．

例. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値 λ，固有ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ を求める．まず λ が A の固有値となるためには $\det(\lambda E - A) = 0$ を満たせばよいので，

$$\det(\lambda E - A) \ = \ \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \ = \ \lambda(\lambda - 3) + 2 \ = \ (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0 \tag{2}$$

つまり固有値は $\lambda = 1, 2$ となる（(2) の多項式を **固有多項式** という）．$\lambda = 1$ に対する固有ベクトルは $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$，つまり

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

を満たせばよいので，これを解いて $x_1 = -x_2$，つまり $\boldsymbol{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ が固有ベクトルとなる．$\lambda = 2$ に対する固有ベクトルは同様の計算で $\boldsymbol{x} = c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ となる.（ここで c_1, c_2 は任意の実数）

問 79. 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$　　(3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

問 80. 解説の中の地球の自転の例を確かめよ（つまり $\mathbb{R}^3$ の 6 時間分の自転に対応する線形変換を作りその固有値・固有ベクトルを求める）.

問 81. 解説の中の正方形の引き延ばしの例を確かめよ（つまり $\mathbb{R}^2$ の x 成分のみを 2 倍にするような線形変換を作りその固有値・固有ベクトルを求める）.

定義. A を n 次元正方行列，λ を A の固有値とする．λ に対する固有ベクトル全体に零ベクトル $\boldsymbol{o}$ を付け加えて得られる集合

$$V(\lambda) \ = \ \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \mid (\lambda E - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\}$$

は $\mathbb{C}^n$ の部分空間となっている．この $V(\lambda)$ を，A の λ に対する **固有空間** という.

注意. 次元公式により，$V(\lambda)$ の次元は $\dim V(\lambda) = n - \mathrm{rank}(\lambda E - A)$ と表される.

問 82. 次の行列の固有値とその固有値に対する固有空間を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$

問 83. n 次行列 A の固有値を λ，$\boldsymbol{x}$ を λ に対する固有ベクトルとするとき，次のことをそれぞれ示せ.

1. λ は ${}^tA$ の固有値である.
2. $c\lambda$ は cA の固有値で，$\boldsymbol{x}$ は対応する固有ベクトルである（c は 0 でない定数）.
3. $\lambda + c$ は $A + cE$ の固有値で，$\boldsymbol{x}$ は対応する固有ベクトルである.
4. $1/\lambda$ は A^{-1} の固有値で，$\boldsymbol{x}$ は対応する固有ベクトルである.
5. $|A|/\lambda$ は ${}^t\widetilde{A}$（${}^t\widetilde{A}$ は A の余因子行列）の固有値で，$\boldsymbol{x}$ は対応する固有ベクトルである.
6. $\bar{\lambda}$ は $\bar{A}$ の固有値で，$\bar{\boldsymbol{x}}$ は対応する固有ベクトルである.

問 84. 行列 A の固有多項式を $\varphi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$ とするとき，次の各行列の固有多項式を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} A & A \\ O & E \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} O & A \\ A & O \end{pmatrix}$

11 行列の対角化

定義. $A \in M_n(\mathbb{R})$ に対し，$P^{-1}AP$ が対角行列となるような正則行列 P が存在するとき，A は**対角化可能**であるという．

問 85. 以下の $\boxed{1}$ ∼ $\boxed{4}$ に入る言葉を選択肢から選び，$\boxed{5}$ に入る行列を求めよ．

- n 次正方行列 $P = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n) \in M_n(\mathbb{R})$ が逆行列を持つための必要十分条件は $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ が $\boxed{1}$ になることである．つまり，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の $\boxed{2}$ である．
- 一方，n 次正方行列 $A \in M_n(\mathbb{R})$ について，ある $\lambda \in \mathbb{R}$ とある零ベクトルでないベクトル $\boldsymbol{v}$ が存在し，$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ が成り立っているとき，λ を A の $\boxed{3}$，$\boldsymbol{v}$ を (λ に対する)A の $\boxed{4}$ という．
- 今，$A\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1\boldsymbol{v}_1, \dots, A\boldsymbol{v}_n = \lambda_n\boldsymbol{v}_n$ が成り立ち，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の $\boxed{2}$ であるとする．このとき線形写像 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ の，$\boxed{2}$ $\mathbb{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ に関する表現行列は $\boxed{5}$ である．問 39 より $P = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ と置いたとき，
$$P^{-1}AP = \boxed{5}$$
となる．

$\boxed{1}$ ∼ $\boxed{4}$ の選択肢

線形空間　部分空間　一次独立　一次従属　基底　次元　固有値　固有ベクトル

問 86. $A \in M_n(\mathbb{R})$ の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ が相異なるとき，対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{R}^n$ は一次独立になる．このことを帰納法を用いて示せ．
（ヒント：$p = 1$ のとき $\boldsymbol{v}_1$ は零でないので一次独立．$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_p$ が一次独立であると仮定して，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_p, \boldsymbol{v}_{p+1}$ の一次独立性を示す．まず
$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_p\boldsymbol{v}_p + c_{p+1}\boldsymbol{v}_{p+1} = \boldsymbol{0} \qquad (\spadesuit)$$
とおく．この両辺に左から A を掛けて，更に $A\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1\boldsymbol{v}_1$ 等に注意すると
$$c_1\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_p\lambda_p\boldsymbol{v}_p + c_{p+1}\lambda_{p+1}\boldsymbol{v}_{p+1} = \boldsymbol{0}$$
となる．これから ($\spadesuit$) の λ_{p+1} 倍を引く．以下は各自で考えよ.）

対角化のアルゴリズム 1（固有値が n 個存在する i.e. 固有多項式の根が全て単根である場合）．

1. n 次正方行列 A の固有値を求める．このとき固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ が相異なっているとする．
2. 固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ を求める．
3. $P = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)$ とおくと
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$
となる．

注意 A．上の 3. について補足しておきましょう．今，$A\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1\boldsymbol{v}_1, \ldots, A\boldsymbol{v}_n = \lambda_n\boldsymbol{v}_n$ が成り立っているので

$$\begin{pmatrix} A\boldsymbol{v}_1 & \cdots & A\boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\boldsymbol{v}_1 & \cdots & \lambda_n\boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

が成り立ちます．一方，$(A\boldsymbol{v}_1, \ldots, A\boldsymbol{v}_n) = A(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ なので，これらから

$$A \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (\clubsuit)$$

が成り立ちます．従って $P = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ が正則ならば，P^{-1} を $(\clubsuit)$ の左から掛けて結論を得ますが，問 86 から P が正則であることが分かります．

例．演習プリント $p.23$ において $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値は $\lambda = 1, 2$ で，固有値 $\lambda = 1$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，固有値 $\lambda = 2$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ であることを見た．従って固有ベクトルを並べた行列を $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となっている．

注意 B．固有ベクトルのとり方が一意でないので，P の形は上で求めたものの他に沢山あります．教科書や演習書の解答を見るときは注意してください．

問 87．次の行列の固有値，固有ベクトルを求めて対角化せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

注意．この問題のように固有値が複素数になることもあります．

※ 問 85 や上の注意 A より，A が対角化可能であるためには必ずしも固有値が全て異なる必要はありません．$A\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1\boldsymbol{v}_1, \ldots, A\boldsymbol{v}_n = \lambda_n\boldsymbol{v}_n$ となる**一次独立な**$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が存在すればいいのです．($\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ は同じものがあってもよい．）実際，次が成り立ちます．

定理．$A \in M_n(\mathbb{R})$ の相異なる固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ $(p \le n)$ とおき，対応する固有空間を $V(\lambda_1), \ldots, V(\lambda_p)$ とする．このとき A が対角化可能であるための必要十分条件は，$\dim V(\lambda_1) + \cdots + \dim V(\lambda_p) = n$ となっていることである．

※ 上の定理をもう少し詳しくした定理は次のようなものです.

定理. $A \in M_n(\mathbb{R})$ の固有多項式を $\Phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdots (\lambda - \lambda_p)^{n_p}$ とする.($\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ は相異なる.)更に固有値 λ_i に対する固有空間を $V(\lambda_i)$ とする.このとき A が対角化可能であるための必要十分条件は,$\mathrm{dim}V(\lambda_1) = n_1, \ldots, \mathrm{dim}V(\lambda_p) = n_p$ が成り立っていることである.

対角化のアルゴリズム 2(一般の場合).

1. $A \in M_n(\mathbb{R})$ の固有値を $\lambda_1(n_1$ 乗根$), \lambda_2(n_2$ 乗根$), \ldots, \lambda_p(n_p$ 乗根$)$ とする.
2. 固有値 $\lambda_i\ (i = 1, \ldots, p)$ に対応する固有空間 $V(\lambda_i)$ の基底を適当に選んで $\boldsymbol{v}_{i,1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i,n_i}$ とおく.(対角化可能ならば n_i 個取れるはずである.)
3. 固有空間の基底を並べた行列を $P = (\boldsymbol{v}_{1,1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{1,n_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{p,1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{p,n_p})$ とおくと
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_p & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_p \end{pmatrix}$$
となっている.

例. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ の固有多項式は $\Phi(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$ より固有値は $\lambda = 1, 2(2$ 重根$)$ である.固有値 $\lambda = 1$ に対する固有空間は $V(1) = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$ と書けるので,$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ とおく.次に固有値 $\lambda = 2$ に対する固有空間は $V(2) = \left\{ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \middle| c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$ と書けるので,$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ とおく.今,これらを並べた行列を $P = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ とおくと
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
となる.

問 88. 次の行列を対角化せよ．また，変換行列 P も求めよ．

$$(1) \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 3 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad (2) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad (3) \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

例. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有多項式は $\Phi(\lambda) = (\lambda - 1)^3$ より固有値は $\lambda = 1$(3 重根) である．

$\lambda = 1$ に対する固有空間は $V(1) = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$ であり，$\dim V(1) = 1 < 3$ なので A は対角化可能でない．

問 89. 次の行列が対角化可能か．対角化可能であれば，変換行列 P を求めて対角化せよ．

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad (2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

※ 行列の対角化の応用として次のようなべき乗の計算があります．

問 90. $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ は $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ により $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ と対角化される．A^n を求めよ．

問 91. 漸化式 $\begin{cases} x_n = 7x_{n-1} + 3y_{n-1} \\ y_n = x_{n-1} + 5y_{n-1} \end{cases}$，$x_0 = 3, y_0 = -2$ は $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ と表せる．$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ を対角化して n 乗を求めることにより，数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ の一般項を求めよ．

問 92. フィボナッチ数列 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$，$a_1 = a_2 = 1$ は $\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$ と変形できる．行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を用いて $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ と対角化される．ここに α, β は $x^2 - x - 1 = 0$ の解である．フィボナッチ数列の一般項を求めよ．

問 93. 連立微分方程式 $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = 4x(t) - y(t) \end{cases}$ は $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ と表せる．行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ は $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ を用いて $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ と対角化される．更に，解析学で習った様に微分方程式 $z'(t) = \lambda z(t)$ の一般解は $z(t) = z_0 e^{\lambda t}$ である．これを用いて連立微分方程式の一般解 $x(t), y(t)$ を求めよ．

12　行列の三角化

定義. 行列 B が適当な正則行列 P を用いて $B = P^{-1}AP$ と書けるとき，A は B に相似であるといい $A \sim B$ と書く.

問 94. n 次正方行列 A, B が $A \sim B$ を満たすとき，次が成り立つことをそれぞれ示せ.

1. $|A| = |B|$
2. $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}B$
3. $f_A(\lambda) = f_B(\lambda)$（$f_A$ は A の固有多項式）
4. $\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}B$
5. A と B の固有値は重複度も込めて一致している.

定義. 正方行列 A に対し，$U^{-1}AU$ が上三角行列となるような正則行列 U が存在するとき，A は**三角化可能**であるという.（行列が対角化可能であるためにはいくつか条件がありますが，三角化であればいつでも可能です.）

定理.（フロベニウスの定理）n 次正方行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とするとき，行列多項式 $f(A)$ の固有値は $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$ である.

問 95. 上記のフロベニウスの定理において「$f(A)$ が正則 $\Leftrightarrow$ $f(\lambda_i) \neq 0$ $(i = 1, \cdots, n)$」を示せ.（ヒント：教科書の定理 7.2 (p162) を用いましょう）

問 96. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $g_1(t) = 3t^3 - 5t^2 - 2t + 9$, $g_2(t) = t^3 - 3t^2 + 3t + 7$ としたとき，$g_1(A)$ は正則であり $g_2(A)$ は正則でないことを示せ.

問 97. $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 5 \\ -3 & 2 & -3 \\ -7 & 1 & -6 \end{pmatrix}$ のとき，$2E + 3A^3 + A^5$ の固有値，トレース，行列式を求めよ.

問 98. $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -6 & 5 & 2 \\ -7 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ のとき，$4E + 2A^2 - 3A^4 + A^5$ の固有値，トレース，行列式を求めよ.

問 99. 上三角行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は対角行列と相似とはならないことを示せ.

定理. （ケーリー・ハミルトンの定理） n 次正方行列 A の固有多項式 $f_A(\lambda)$ に対して，$f_A(A) = O$ が成り立つ.

問 100. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，$A^5 - 4A^4$ を計算せよ.

問 101. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき，次の行列を計算せよ.

(1) $A^3 - 2A^2$　　(2) $A^5 - 2A^4$

問 102. 問 96 の $A, g_1(t)$ と A の固有多項式 $f_A(t)$ において，次の問いに答えよ.

(1) $g_1(t) = f_A(t)h(t) + at + b$ として，a, b を求めよ.

(2) $g_1(A)^{-1}$ を求めよ.