

平成 21 年度 応用数学 I 演習 (11 月 18 日実施) 要点のまとめ

(注意) 以下 y は x の関数 $y(x)$ であり, y', y'' は導関数 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ を表す.

1 階線形微分方程式

次の微分方程式を 1 階線形微分方程式という:

$$y' + a(x)y = f(x) \quad (\spadesuit)$$

解法:

- (1) 不定積分 $A(x) = \int a(x)dx$ を 1 つ 求める (積分定数は不要.)
- (2) (\spadesuit) の両辺に $e^{A(x)}$ を掛ける. このとき左辺は $(ye^{A(x)})'$ となる.
- (3) 両辺を積分し $e^{A(x)}$ で割って, 求める一般解は

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(\int e^{A(t)} f(t) dt + C \right) \quad (\heartsuit)$$

となる (積分定数 C を忘れないこと.)

- (4) 初期条件 $y(0) = a$ が与えられているときは (\heartsuit) に $x = 0$ を代入して C を求める.

例 1 微分方程式 $y' - (\tan x)y = e^x$ ($-\pi/2 < x < \pi/2$) の一般解を求めよ.

変数分離型

次のように y' が x の関数と y の関数の積で書けているとき, 変数分離型という:

$$y' = f(x)g(y) \quad (\diamond)$$

解法:

- (1) $g(y) \equiv 0$ となる定数解 y がないか確かめる. 以下ではこれ以外の解を求める.
- (2) (\diamond) の両辺を $g(y)$ で割って x で積分すると, 左辺は置換積分の公式から

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C \quad (\clubsuit)$$

となる (積分定数 C を忘れないこと.)

- (3) 可能ならば (\clubsuit) を $y(x) = \dots$ で表す.
- (4) 初期条件 $y(0) = a$ が与えられているときは (\clubsuit) に $x = 0$ を代入して C を求める.

例 2 初期値問題 $y'(x) = e^{x-y}$, $y(0) = \log 2$ の解を求めよ .

細かい注意 . 本来は変数分離の解法の (2) で方程式の両辺を $g(y)$ で割るときに全ての x で $g(y(x)) \neq 0$ となっているという条件が必要です . これには解の一意性の定理が使われていて , どのように使うのかを参考までに以下に書いておきます .

例題 1 (解の一意性を用いた厳密な解法) . $y' = y^2$ の解を全て求めよ .

解 . $f(x, y) = y^2$ とおくと , $f(x, y) = y^2$, $f_y(x, y) = 2y$ は連続だから教科書 p.49 の定理 2.2 より初期値問題の解の存在・一意性が成立する .

ここで $y \equiv 0$ は解であるから , これ以外の解を考えると値が 0 になることはない . 従って $y \neq 0$ ならば両辺を y^2 で割ることができる .

$$\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} = 1 \xrightarrow{x \text{ で積分}} \int \frac{dy}{y^2} = \int dx + C \quad -\frac{1}{y} = x + C$$

故に求める解は $y = 0$, $y = -\frac{1}{x+C}$ (C は任意定数) である .

定数係数の 2 階同次線形微分方程式

次の定数係数の 2 階線形同次微分方程式を考える (a, b は定数とする) :

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{\#}$$

解法 :

(1) 次の 2 次方程式の解を求める (この方程式を特性方程式という) :

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{b}$$

(2) (b) の解によって , 元の微分方程式 (#) の一般解は次で与えられる :

(a) (b) が異なる 2 つの実数根 α, β を持つとき , $y(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{\beta x}$

(b) (b) が重根 α を持つとき , $y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{\alpha x}$

(c) (b) が虚数根 $p \pm iq$ を持つとき , $y(x) = e^{px} (c_1 \cos qx + c_2 \sin qx)$

(3) 初期条件 $y(0) = a$, $y'(0) = b$ が与えられているときは (2) の $y(x)$ とそれを微分した $y'(x)$ に $x = 0$ を代入して c_1, c_2 を求める .

例 3 次の微分方程式の一般解を求めよ .

(1) $y'' + 2y' + 2y = 0$

(2) $3y'' - 4y' + y = 0$

以下，今回の演習では扱いません（おまけ）

定数係数の 2 階非同次線形微分方程式（未定係数法）

次の定数係数の 2 階線形非同次微分方程式を考える（ a, b は定数とする）：

$$y'' + ay' + by = f(x) \tag{†}$$

解法：

- (1) 同次方程式 (‡) の解 $y_h(x)$ を前節から求める．
- (2) 下の表から非同次方程式 (†) の特殊解 $y_p(x)$ の形を探し，微分方程式に代入して，係数を求める．これで特殊解が求まる．
- (3) 非同次方程式 (†) の一般解は $y = y_h(x) + y_p(x)$ で与えられる．

$f(x)$ のタイプ	特性方程式 (b) に関する条件	特殊解の形
c (定数)	0 を根に持たない 0 が k 重根	a ax^k
x^n	0 を根に持たない 0 が k 重根	$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ $x^k(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)$
$e^{\alpha x}$	α を根に持たない α が k 重根	$ae^{\alpha x}$ $ax^k e^{\alpha x}$
$x^n e^{\alpha x}$	α を根に持たない α が k 重根	$(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)e^{\alpha x}$ $x^k(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)e^{\alpha x}$
$\cos \beta x$ や $\sin \beta x$	$\pm i\beta$ を根に持たない $\pm i\beta$ が k 重根	$a \cos \beta x + b \sin \beta x$ $x^k(a \cos \beta x + b \sin \beta x)$
$e^{\alpha x} \cos \beta x$ や $e^{\alpha x} \sin \beta x$	$\alpha \pm i\beta$ を根に持たない $\alpha \pm i\beta$ が k 重根	$e^{\alpha x}(a \cos \beta x + b \sin \beta x)$ $x^k e^{\alpha x}(a \cos \beta x + b \sin \beta x)$
$x^n e^{\alpha x} \cos \beta x$ や $x^n e^{\alpha x} \sin \beta x$	$\alpha \pm i\beta$ を根に持たない $\alpha \pm i\beta$ が k 重根	$(a_0 + \cdots + a_nx^n)e^{\alpha x} \cos \beta x$ $+(b_0 + \cdots + b_nx^n)e^{\alpha x} \sin \beta x$ $x^k(a_0 + \cdots + a_nx^n)e^{\alpha x} \cos \beta x$ $+x^k(b_0 + \cdots + b_nx^n)e^{\alpha x} \sin \beta x$

注：上の表の k 重根は $k = 1$ の場合（つまり単根である場合）も含まれます．

注： x^n の代わりに $1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ (n 次多項式) としても構いません．

例題 2 (未定係数法による非同次方程式の解法 1) . 次の微分方程式の一般解を求めよ .

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-x}$$

解 . 同次方程式

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

の特性方程式は

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

より $\lambda = 1, 2$ である．従って同次方程式の一般解は

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

である．次に非同次方程式の特殊解を求める．表から e^{-x} の特殊解の形は (-1 が特性方程式の根でないので) $y_p = a e^{-x}$ となる．これを非同次方程式に代入し

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = a e^{-x} + 3a e^{-x} + 2a e^{-x} = 6a e^{-x} = e^{-x} \quad a = \frac{1}{6}$$

従って特殊解は $y_p(x) = e^{-x}/6$ である．故に非同次方程式の一般解は

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \frac{1}{6} e^{-x}$$

となる．

例題 3 (未定係数法による非同次方程式の解法 2) . 次の微分方程式の一般解を求めよ .

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$$

解 . 同次方程式

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

の特性方程式は

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

より $\lambda = -1, -2$ である．従って同次方程式の一般解は

$$y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

である．次に非同次方程式の特殊解を求める．表から e^{-x} の特殊解の形は (-1 が特性方程式の単根なので) $y_p(x) = a x e^{-x}$ となる．これを非同次方程式に代入して

$$y_p'' + 3y_p' + 2y_p = a(x-2)e^{-x} + 3a(1-x)e^{-x} + 2a x e^{-x} = a e^{-x} = e^{-x} \quad a = 1$$

従って特殊解は $y_p(x) = x e^{-x}$ である．故に非同次方程式の一般解は

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + x e^{-x}$$

である．

参考 (定数変化法の考え方) . 未定係数法は $f(x)$ が簡単な形をしているとき非常に有効であるが万能な方法ではない．ここでは定数変化法の考え方だけを紹介する．

考え方 . 同次方程式 (‡) の解が

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

と書けていることに注目しよう . $f \neq 0$ である限り定数 c_1, c_2 をどのように定めても $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ が (†) の解になることはない . しかし c_1, c_2 が定数ではなくて何らかの関数である場合

$$y(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) \quad (\ddagger)$$

が (†) の解になるかもしれない . では $c_1(x), c_2(x)$ がどのような関数ならば (‡) の $y(x)$ が非同次方程式 (†) の解になるであろうか .

このような考えで得られた特殊解 y_p の公式が教科書 p.83 の (4.11) で与えられている .