

平成 19 年度 応用数学 II 小テスト (6 月 6 日実施) 略解

問題 1.

曲線

$$\mathbf{r}(t) = {}^t[e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t], \quad -1 \leq t \leq 1$$

の長さを求めよ.

略解. $\mathbf{r}'(t) = {}^t[e^t, -e^{-t}, \sqrt{2}]$ となるから

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(e^t)^2 + (-e^{-t})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{(e^{2t} + 2 + e^{-2t})} = \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} = e^t + e^{-t}$$

である. 従って求める曲線の長さを L とおくと

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^1 |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_{-1}^1 (e^t + e^{-t}) dt \\ &= [e^t - e^{-t}]_{-1}^1 = (e - e^{-1}) - (e^{-1} - e) = 2(e - e^{-1}). \end{aligned}$$

採点基準. 問題 1 は 5 点満点で採点しました. 積分の間違いで 2 点の減点, 些細なケアレスミスで 1 点の減点をしています.

問題 2.

関数

$$f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 3$$

について

(a) $\text{grad} f$ を求めよ.

(b) f の定数面

$$S := \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = \sqrt{2}\}$$

の単位法線ベクトルを求めよ.

略解. (a) $f_x = 2x, f_y = 2y, f_z = 2z$ であるから求める勾配ベクトルは

$$\text{grad} f = {}^t[2x, 2y, 2z].$$

(b) 教科書 p.60(!!) の 命題 により $\text{grad} f$ が法線ベクトルになる. 求めるものは**単位**法線ベクトルであるから $\text{grad} f$ の大きさを割ればよい.

$$|\text{grad} f| = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2\sqrt{3 + \sqrt{2}}$$

(注: (x, y, z) は S 上の点) であるので, 求める単位ベクトル $\mathbf{n}$ は

$$\mathbf{n} = \frac{\text{grad} f}{|\text{grad} f|} = \frac{2}{2\sqrt{3 + \sqrt{2}}} {}^t[x, y, z] = \frac{1}{\sqrt{3 + \sqrt{2}}} {}^t[x, y, z]$$

である。

(別解) S 上の点を $P = {}^t[x, y, z]$ とすると, ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と P における S の接平面は直交する. $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{3 + \sqrt{2}}$ なので求める単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ は $\frac{1}{\sqrt{3 + \sqrt{2}}} {}^t[x, y, z]$ である.

採点基準. 問題 2 の配点は 7 点で, (a) は 4 点, (b) は 3 点で採点しました. (a) については $\text{grad } f$ がベクトルになっていないとき 3 点の減点, 些細なケアレスミスは 1 点の減点をしています. (b) については考えた形跡があれば若干加点しています.

問題 3.

ベクトル場

$$\mathbf{X}(x, y, z) := {}^t[xyz, x + y + z, xy + yz + zx]$$

について, $\text{rot } \mathbf{X}$ および $\text{div } \mathbf{X}$ を求めよ.

略解. $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ とおくと

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial X_3}{\partial y} - \frac{\partial X_2}{\partial z} \\ \frac{\partial X_1}{\partial z} - \frac{\partial X_3}{\partial x} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(xy + yz + zx) - \frac{\partial}{\partial z}(x + y + z) \\ \frac{\partial}{\partial z}(xyz) - \frac{\partial}{\partial x}(xy + yz + zx) \\ \frac{\partial}{\partial x}(x + y + z) - \frac{\partial}{\partial y}(xyz) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + z - 1 \\ xy - y - z \\ 1 - xz \end{bmatrix}. \\ \text{div } \mathbf{X} &= \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\partial X_3}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(xyz) + \frac{\partial}{\partial y}(x + y + z) + \frac{\partial}{\partial z}(xy + yz + zx) \\ &= yz + 1 + y + x. \end{aligned}$$

採点基準. 問題 3 の配点は 8 点で, rot , div 各 4 点で採点しました. 尚, rot がベクトルに, div がスカラーになっていないときは 3 点の減点, 些細なケアレスミスは 1 点の減点をしています.

講評. 問題 2 の (b) を除いてよくできていました. しかし, **grad や rot がベクトルに, div がスカラーになっていないものが若干ありました.** これには厳しく減点しています. また問題 1 の積分に苦戦しているものがいくつかありましたので解答例には一番単純と思われるものを載せています. 参考にしてください. さて問題 2 の (b) ですが曲面における (単位) 法線ベクトルを未学習であったり, 用いた命題が未学習であることを考慮してあまり配点は大きくしていません. 4 章を習ったときに確認してください. ちなみに昨年の応用数学 II の教科書を持っている人は p.52 の記述も参考にしてください. 今回ケアレスミスで減点された人は期末試験では十分注意してください. **(部分点が出ない可能性もあります.)** さて, これから曲面や面積分に進みますが, 実際に問題を解くには 1 年次の微分学・積分学で学習したことが必要になります. 理解の度合いに不安がある人は復習しておきましょう.

注意. 今年度, 使用している教科書にはミスプリが沢山あります. 教科書のサポートページに正誤表がありますがそれに載っていないミスプリもかなりあります. 変だと思ったら質問するようにしてください.

平成 19 年度 応用数学 II 演習問題 (4 月 11 日～6 月 27 日分) 略解

- 以下は講義で配布されたプリントに載っている問題のうち、教科書にない問題、教科書にあるが解答が間違っている問題、教科書にあるが解答がない又は最終的な答えしか載っていない問題の略解です。
- それ以外の問題は、教科書のサポートページ <http://www.saiensu.co.jp> にある「問・章末問題 正解・略解」の該当する箇所を参照してください。

問題 0411.

- (a) 平面 $x - y + z = 2$ に平行で、点 $(3, 5, 7)$ を通る平面の方程式を求めよ。
- (b) 点 $(1, 2, 3)$ と平面 $x + y - z = 5$ の最短距離を求めよ。

略解. (a) $x - y + z = 2$ の法線ベクトルは ${}^t(1, -1, 1)$ であるので¹²、点 ${}^t(3, 5, 7)$ を通る平面の方程式は

$${}^t(x - 3, y - 5, z - 7) \cdot {}^t(1, -1, 1) = 0 \quad \therefore x - y + z = 5$$

(b) 教科書 p.9 の例題より

$$\frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + (-5)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

問題 0418.

1. $f = f(x, y)$ を C^1 級関数とする. 次に挙げる各座標変換 $(x, y) = \phi(u, v)$ について $\frac{\partial f}{\partial v}, \frac{\partial f}{\partial u}$ を $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ を用いて表せ。
- (a) $\phi(u, v) = \left(\frac{u+v}{\sqrt{2}}, \frac{u-v}{\sqrt{2}} \right)$
- (b) $\phi(u, v) = (-u^2 + 4u, v)$
2. さらに、上の問題への追加として：
この変換のヤコビ行列およびヤコビ行列式を求めよ。
3. 勾配ベクトル場を求める問題 [教科書, 2.2.5, (i), (iii)]

略解. 次に注意する：

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

¹教科書 p.9 例題の上の記述参照。

²法線ベクトルが同じ平面は平行であることに注意。

1. (a) 偏微分を計算すると $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ であるので

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}$$

- (b) 偏微分を計算すると $^3\frac{\partial x}{\partial u} = -2u + 4 = \pm 2\sqrt{4-x}, \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial v} = 0, \frac{\partial y}{\partial v} = 1$ であるので

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \pm 2\sqrt{4-x} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

2. ヤコビ行列およびヤコビ行列式は

$$J := \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = |J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

で定義される.

- (a)

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -1$$

- (b)

$$J = \begin{pmatrix} -2u + 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -2u + 4$$

3. (i) サポートページにある問・章末問題 正解・略解 (以下, 「正解・略解」と呼ぶ) p.2 の (2.5) を参照してください.

- (iii) $f = (x - z)(1 + x^2 - y^2)^{-1}$ とおく. ここで

$$\begin{aligned} f_x &= (1 + x^2 - y^2)^{-1} + (x - z)(-1)(1 + x^2 - y^2)^{-2}(2x) \\ &= (1 + x^2 - y^2)^{-2}(1 - x^2 - y^2 - 2xz) \\ f_y &= (x - z)(-1)(1 + x^2 - y^2)^{-2}(-2y) = (1 + x^2 - y^2)^{-2}(2y(x - z)) \\ f_z &= -(1 + x^2 - y^2)^{-1} \end{aligned}$$

従って

$$\text{grad} f = {}^t \left(\frac{1 - x^2 - y^2 - 2xz}{(1 + x^2 - y^2)^2}, \frac{2y(x - z)}{(1 + x^2 - y^2)^2}, \frac{-1}{1 + x^2 - y^2} \right).$$

問題 0425.

- 点 $\mathbf{p}_0$ を 1 つ止めるとき, $\left\| \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right)_{\mathbf{p}_0} \right\|$ が最大になるのはどのような $\mathbf{v}$ についてであるか?
- ベクトル場 $\mathbf{F}(x, y) = {}^t[2x, y]$ の流線を描け.

$^3\frac{\partial x}{\partial u}$ の計算では $-u^2 + 4u = x$ より $u^2 - 4u + x = 0$. これを u について解くと $u = 2 \pm \sqrt{4-x}$ となることを用いている.

略解. 1. 4月25日の講義プリント（試験的演習問題3）のp.2の上から7行目の式

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{p_0} = (\text{grad} f)_{p_0} \cdot \boldsymbol{v}$$

を使う。右辺のベクトル $(\text{grad} f)_{p_0}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角を θ とすると、

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{p_0} = \|(\text{grad} f)_{p_0}\| \|\boldsymbol{v}\| \cos \theta$$

となる。従って

$$\left\| \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{p_0} \right\| = \|(\text{grad} f)_{p_0}\| \|\boldsymbol{v}\| |\cos \theta|$$

となり、右辺が最大になるのは $\cos \theta = \pm 1$ のとき、即ち $\theta = 0$ または $\theta = \pi$ のときである。従って $\boldsymbol{v}$ が $(\text{grad} f)_{p_0}$ と平行のときである。

2. 流線の微分方程式 $x'(t) = 2x(t), y'(t) = y(t)$ を解くと $x(t) = C_1 e^{2t}, y(t) = C_2 e^t$ が得られる。これから t を消去すると $x(t) = C y(t)^2$ ($C = C_1/C_2^2, C_2 \neq 0$), $y(t) = 0$ となりこれは放物線および x 軸である。ベクトル場と流線を同時に図示すると次のようになる。

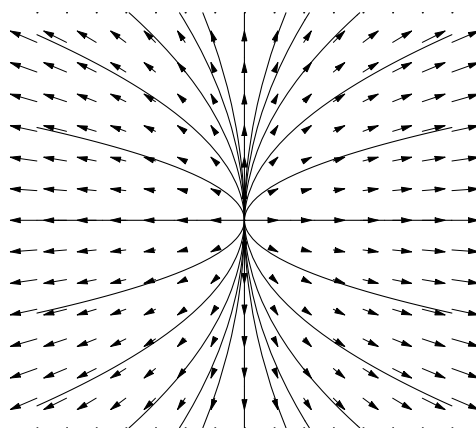


図 1: ベクトル場と流線

問題 0502.

1. 2次元のラプラシアンを極座標表示で表せ。
2. また、平面から原点を除いたところで調和な関数 u が原点からの距離だけに依存した値をとるとき、 u の一般形を定めよ。

略解. 1. 2次元の極座標は

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

で与えられる．従って

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan \frac{y}{x} \quad (\star)$$

である．

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}$$

の各係数を $(\star)$ から直接求めてもいいが次のような方法もある：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial y} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial x}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial y} = -r \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

である．これを行列を使って書くと

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

ここに現れる行列の逆行列は $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{r} \\ \sin \theta & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix}$ であるのでこれを左から掛けることにより

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{r} \\ \sin \theta & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

即ち

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

が得られる．従って

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \\ &= \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &\quad - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \\ &\quad + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} + \frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} - 2 \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} + 2 \frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

同様に

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2 \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} - 2 \frac{\cos \theta \sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

ゆえに

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}.$$

2. 求める関数 $u(r)$ は θ に依存しないので $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} u = 0$ である. u は調和関数だからラプラス方程式

$$\Delta u = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} = 0 \quad (\spadesuit)$$

を満たす. これは $v = \frac{du}{dr}$ と置けば

$$\frac{dv}{dr} + \frac{1}{r} v = 0$$

となり変数分離型で

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dr}{r}, \quad \log v = -\log r + C_1, \quad \therefore v = \frac{C}{r}$$

と解けるので

$$u = \int \frac{C}{r} dr = C \log r + C'$$

が u の一般形である.

別解. (r を掛けると

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = 0, \quad \therefore r \frac{du}{dr} = C$$

となることを利用しても良い.

問題 0509.

1. 教科書章末問題 3.1, 3.2, 3.3 など.

2. $a > 0$ を定数とするとき曲線

$$C : \begin{cases} x(t) = a \cos^3 t \\ y(t) = a \sin^3 t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

の概形を描き, その長さを求めよ.

略解. 1. 問題 3.2, 問題 3.3 については「正解・略解」p.3 (3.2), p.4 (3.3) を参照してください. 問題 3.1 はそれぞれ図 2 のようになる.

2. 概形は図 3 のようになる.

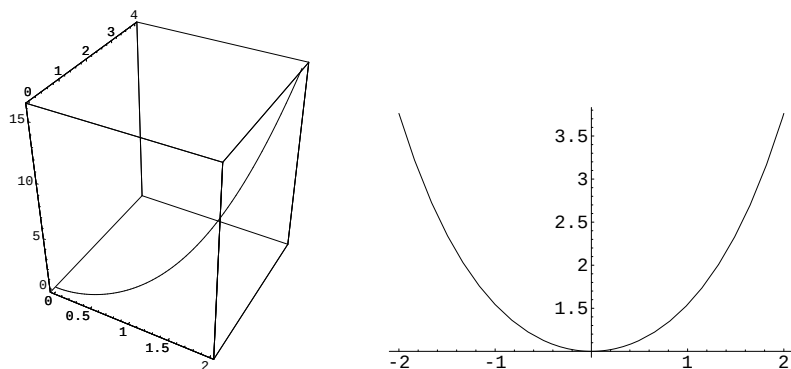


図 2: 問題 3.1 の曲線

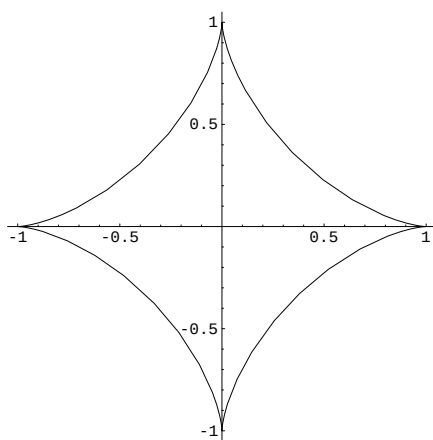


図 3: アステロイド

$\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t)) = (-3a \cos^2 t \sin t, 3a \sin^2 t \cos t)$ より

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}'(t)\|^2 &= 9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t \\ &= 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= 9a^2 (\sin t \cos t)^2 = \frac{9}{4} a^2 \sin^2 2t \end{aligned}$$

求める長さは第 1 象限にある部分の曲線の長さの 4 倍で, このとき $\sin 2t \geq 0$ なので

$$(\text{求める長さ}) = 4 \int_0^{\pi/2} \|\mathbf{r}'(t)\| dt = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{3a}{2} \sin 2t dt = 3a [-\cos 2t]_{t=0}^{\pi/2} = 6a$$

問題 0516.

1. 教科書 42 ページ～44 ページの例題
2. 教科書章末問題 3.1, 3.2, 3.3 など.

略解. 1. 略, 2. 問題 0509 を参照.

問題 0522.

1. 教科書 42 ページ～44 ページの例題
2. 線積分 $\int_{C_i} (x^2 + y^2)dx + xdy$ を次の積分路 C_1, C_2, C_3 について計算せよ:
 - (i) $C_1 = PQ, P = (1, 0), Q = (-1, 0)$
 - (ii) $C_2 : (\cos t, \sin t) (0 \leq t \leq \pi)$
 - (iii) $C_3 : (\cos t, \sin t) (\pi \leq t \leq 2\pi)$.

略解. 1. 略. 2. 問題 3.6 (i) 曲線 C_1 は $\mathbf{r}(t) = (-t, 0) (-1 \leq t \leq 1)$ とパラメータ表示できる.
 $\mathbf{r}'(t) = (-1, 0)$ より

$$I_1 = \int_{C_1} (x^2 + y^2)dx + xdy = \int_{-1}^1 (-t)^2(-1)dt = -\frac{2}{3}$$

(ii), (iii) については「正解・略解」の p.4 (3.6) を参照.

問題 0530.

1. 教科書のさまざまな問題を!
2. 単位円版 D について, $\int_{\partial D} -2xdx + 3ydy = ?$
3. 単位円版 D について, $\int_{\partial D} -2ydx + 3xdy = ?$
4. p, q に対する証明は「同様に」といいながら何故符合が異なるか?

略解. 1. 略. 2. グリーンの公式

$$\int_{\partial D} fdx + gdy = \iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dxdy \quad (\clubsuit)$$

において $f(x, y) = -2x, g(x, y) = 3y$ の場合であるので

$$\int_{\partial D} -2xdx + 3ydy = \iint_D 0dxdy = 0$$

3. グリーンの公式 ($\clubsuit$) において $f(x, y) = -2y, g(x, y) = 3x$ の場合であるので

$$\int_{\partial D} -2ydx + 3xdy = \iint_D 5dxdy = 5 \times (D \text{ の面積}) = 5\pi$$

4. x と y の位置関係が対等でないから. つまり x 軸の $-\infty$ から y 軸を見ると右から左に向かって増加しているが, y 軸の $-\infty$ から x 軸を見ると左から右に向かって増加している.

問題 0606.

1. 曲線

$$\mathbf{r}(t) = {}^t[e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t], \quad -1 \leq t \leq 1$$

の長さを求めよ.

2. 関数

$$f(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 3$$

について

(a) $\text{grad} f$ を求めよ.

(b) f の定数面

$$S := \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = \sqrt{2}\}$$

の単位法線ベクトルを求めよ.

3. ベクトル場

$$\mathbf{X}(x, y, z) := {}^t[xyz, x + y + z, xy + yz + zx]$$

について, $\text{rot } \mathbf{X}$ および $\text{div } \mathbf{X}$ を求めよ.

略解. 以前配布した小テストの解答例を参照してください.

問題 0613.

教科書第4章章末問題から

1. 問題 4.1

2. 問題 4.2

3. 次の曲面の指定した点での接平面を求めよ.

(i) $z = (x + y)e^{-xy}$, 点 $(0, 2, 2)$ で.

(ii) $z = x^2 + y^2$, 点 $(0, 0, 0)$ で.

略解. 1. 曲面の図示は次のページの図4を参照してください. 2. 曲面の図示は次のページの図4を参照, パラメータ表示は「正解・略解」p.5(4.2)を参照してください.

3. 曲面をパラメータ表示 $\mathbf{r}(u, v)$ で表して法線ベクトル $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ を求めて教科書p.9の例題の上の式に代入しても良いが, ここでは講義で省略したp.60の命題を用いる方法を紹介する.

(i) この曲面は $f(x, y, z) = z - (x + y)e^{-xy}$ とおくと $f = 0$ と表せる.

$$\text{grad} f = (-e^{-xy} + y(x + y)e^{-xy}, -e^{-xy} + x(x + y)e^{-xy}, 1)$$

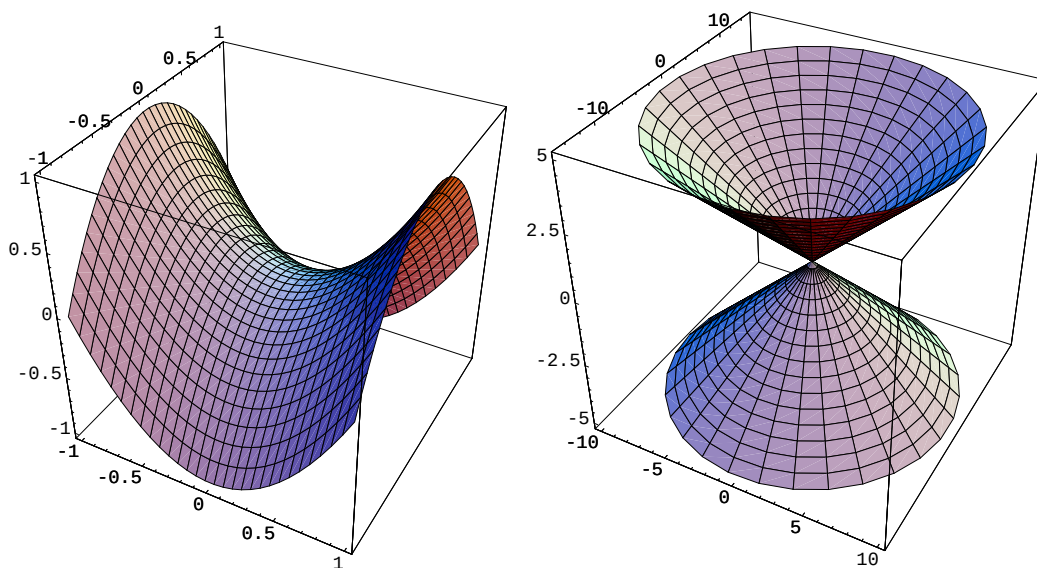


図 4: 問題 4.1・問題 4.2 の曲面

であるので指定された点 $\mathbf{p} = (0, 2, 2)$ における勾配は $(\text{grad } f)(\mathbf{p}) = (3, -1, 1)$ である. 従って教科書 p.60 の命題から接平面は

$$(\text{grad } f)(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{p}) = (3, -1, 1) \cdot (x - 0, y - 2, z - 2) = 0$$

即ち

$$3x - y + z = 0$$

で与えられる.

(ii) 同様に $f = z - x^2 - y^2$ とおくと $f = 0$ が与えられた曲面である.

$$\text{grad } f = (-2x, -2y, 1)$$

であるので指定された点 $\mathbf{p} = (0, 0, 0)$ における勾配は $(\text{grad } f)(\mathbf{p}) = (0, 0, 1)$ である. 従って教科書 p.60 の命題から接平面は

$$(\text{grad } f)(\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{p}) = (0, 0, 1) \cdot (x - 0, y - 0, z - 0) = 0$$

即ち $z = 0$ で与えられる.

問題 0620.

教科書第 5 章章末問題から

1. 問題 5.1
2. 問題 5.6

略解. 1. 「正解・略解」 p.5 (5.1) を参照. 2. 「正解・略解」 p.6 (5.6) を参照.

問題 0627.

ベクトル場

$$\mathbf{F}(x, y, z) := 2z^2\mathbf{i} + 8x\mathbf{j}$$

があるとき、長方形 $R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, y = z\}$ 上での積分

$$\iint_R \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

を計算せよ。ただし、 $\mathbf{n}$ は R の単位法線ベクトルで、その $\mathbf{k}$ 成分は正であるとする。また dS は R の面積要素である。

略解. ストークスの公式：

$$\int_{\partial R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_R \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

により左辺の線積分を計算すればよい。長方形の縁 ∂R を次のように分解する。

C_1 : $(0, 0, 0)$ から $(1, 0, 0)$ に至る道 C_2 : $(1, 0, 0)$ から $(1, 1, 1)$ に至る道

C_3 : $(1, 1, 1)$ から $(0, 1, 1)$ に至る道 C_4 : $(0, 1, 1)$ から $(0, 0, 0)$ に至る道

線積分の線形性から

$$\int_{\partial R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

が成り立つ。

C_1 は $\mathbf{r}(t) = (t, 0, 0)$ ($0 \leq t \leq 1$) とパラメータ表示される。従って $\mathbf{r}'(t) = (1, 0, 0)$ より

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(t, 0, 0) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^1 (0, 8t, 0) \cdot (1, 0, 0) dt = \int_0^1 0 dt = 0$$

C_2 は $\mathbf{r}(t) = (1, t, t)$ ($0 \leq t \leq 1$) とパラメータ表示される。従って $\mathbf{r}'(t) = (0, 1, 1)$ より

$$\int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(1, t, t) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^1 (2t^2, 8, 0) \cdot (0, 1, 1) dt = \int_0^1 8 dt = 8$$

C_3 は $\mathbf{r}(t) = (1 - t, 1, 1)$ ($0 \leq t \leq 1$) とパラメータ表示される。従って $\mathbf{r}'(t) = (-1, 0, 0)$ より

$$\int_{C_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(1 - t, 1, 1) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^1 (2, 8(1 - t), 0) \cdot (-1, 0, 0) dt = \int_0^1 -2 dt = -2$$

C_4 は $\mathbf{r}(t) = (0, 1 - t, 1 - t)$ ($0 \leq t \leq 1$) とパラメータ表示される。従って $\mathbf{r}'(t) = (0, -1, -1)$ より

$$\int_{C_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(0, 1 - t, 1 - t) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^1 (2(1 - t)^2, 0, 0) \cdot (0, -1, -1) dt = 0$$

従って

$$\int_{\partial R} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 + 8 + (-2) + 0 = 6.$$

平成 19 年度 応用数学 II 演習問題 (7 月 11 日・18 日・4 日分) 略解

問題 0711-I.

ベクトル場

$$\mathbf{F} := (x^3 - 2y^3)\mathbf{i} + (x^3 + 2y^3)\mathbf{j}$$

について線積分

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

を求めよ. ここで曲線 C は,

$$C : \mathbf{r}(t) = \begin{cases} t\mathbf{i} & 0 \leq t \leq a \\ a \cos(t-a)\mathbf{i} + a \sin(t-a)\mathbf{j} & a \leq t \leq a + \pi/2 \\ (2a + \pi/2 - t)\mathbf{j} & a + \pi/2 \leq t \leq 2a + \pi/2 \end{cases}$$

で与えられたもの.

略解. $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ とおくと D は領域であり, $\partial D = C$ である. 従ってグリーンの定理から

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (x^3 - 2y^3)dx + (x^3 + 2y^3)dy = \iint_D (3x^2 + 6y^2)dxdy \quad (*)$$

となる. 右辺の重積分は極座標変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ により

$$\begin{aligned} (*) &= \int_0^{\pi/2} \int_0^a 3r^2(\cos^2 \theta + 2\sin^2 \theta)rdrd\theta = \frac{3a^4}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\theta + 1}{2} + 2\frac{1 - \cos 2\theta}{2}d\theta \\ &= \frac{3a^4}{4} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta = \frac{9}{16}a^4\pi \end{aligned}$$

問題 0711-II.

正方形 $D := \{0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$ の境界を (この正方形に関して) 正の向きに 1 周する曲線 C について, 平面上のスカラ場

$$f(x, y) := e^x + e^y$$

の勾配ベクトル場の積分

$$\int_C \text{grad} f \cdot \mathbf{n} ds$$

を計算せよ. ここで $\mathbf{n}$ は D の外向き単位ベクトル, また s は境界の長さの径数を表す.

略解. 7月4日の講義プリント (試験的演習問題 13) の VI の 2次元のガウスの定理より

$$\int_C \text{grad} f \cdot \mathbf{n} ds = \iint_D \text{div}(\text{grad} f) dx dy \quad (\star\star)$$

となる. ここで $\text{div}(\text{grad} f) = \text{div}({}^t(e^x, e^y)) = e^x + e^y$ なので

$$(\star\star) = \int_0^2 \int_0^2 (e^x + e^y) dx dy = \cdots = 4(e^2 - 1)$$

問題 0711-III.

ベクトル場

$$\mathbf{F} := (xy^2 + \cosh x)\mathbf{i} - x^2y\mathbf{j}$$

の平面図形 $P := \{0 \leq y \leq 1 - x^2, x \geq 0\}$ の境界 C に沿う積分

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} ds$$

を求めよ. ただし, $\mathbf{t}$ は C の単位接ベクトル, ds は線素を表す.

略解.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} ds = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (xy^2 + \cosh x) dx - x^2y dy$$

これよりグリーンの定理から

$$\int_C (xy^2 + \cosh x) dx - x^2y dy = \int_P -4xy dx dy = -4 \int_0^1 \int_0^{1-x^2} xy dy dx = \cdots = -1/3$$

問題 0711-IV.

ベクトル場

$$\mathbf{F}(x, y, z) := -3y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

と曲線

$$C : \mathbf{r} = 2 \cos u \mathbf{i} + 2 \sin u \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad 0 \leq u \leq 2\pi$$

に対して, 積分

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}'(s) ds$$

を求めよ. ここで ds は C の線素.

略解. ストークスの公式を用いてもできるが, 直接計算しても大変ではない. ここでは直接

計算してみよう. $\mathbf{r}'(t) = -2 \sin u \mathbf{i} + 2 \cos u \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}$ であるので

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r}'(s) ds &= \int_C (-3(2 \sin u) \mathbf{i} + 3(2 \cos u) \mathbf{j} + 1 \mathbf{k}) \cdot (-2 \sin u \mathbf{i} + 2 \cos u \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}) du \\ &= 12 \int_0^{2\pi} (\sin^2 u + \cos^2 u) du = 12 \int_0^{2\pi} du = 24\pi \end{aligned}$$

問題 0711-V.

- (a) 集合 $D := \{(x, y) | x^2 + y^2 < 16, x < 0, y > 0\}$ をスケッチし, それが領域であることを示せ.
- (b) D の境界を正の向きに取る (すなわち D を左側に見るように向き付ける) とき, D 上のスカラー場

$$f(x, y) = (x + 3y)^2 + 3x$$

について, 積分

$$\int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial n} ds$$

を計算せよ. ただし, $\partial/\partial n$ は D に関して外向き法線方向の微分を, また ds は境界の長さの要素を, それぞれ表すものとする.

略解. (a) 図1の通り. (b) 4月25日の講義プリント (試験的演習問題3) の4. より

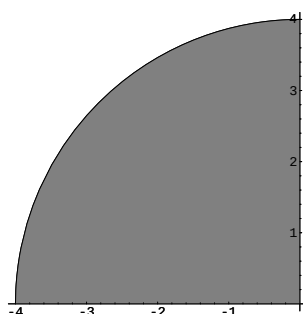


図 1: 領域 D

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \text{grad} f \cdot \mathbf{n}$$

が成り立つ. このことと2次元のガウスの定理より

$$\int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial n} ds = \int_{\partial D} \text{grad} f \cdot \mathbf{n} ds = \iint_D \text{div}(\text{grad} f) dx dy \quad (\clubsuit)$$

ここで $\text{div}(\text{grad} f) = \text{div}({}^t(2x + 6y + 3, 6x + 18y)) = 2 + 18 = 20$ より

$$(\clubsuit) = \int_D 20 dx dy = 20 \times (\text{半径 } 4 \text{ の円の面積の } 1/4) = 80\pi$$

問題 0711-VI.

楕円柱面 $E : x^2 + 9y^2 = 9$ 上にある (単純な) 閉曲線

$$C : x^2 + 9y^2 = 9, \quad z = x^2$$

とベクトル場

$$\mathbf{F}(x, y, z) := 2xz\mathbf{i} - z^2\mathbf{j} + (x^2 - 2yz)\mathbf{k}$$

に関して積分

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

を計算せよ.

略解. $S = \{(x, y, z) | x^2 + 9y^2 \leq 9, z = x^2\}$ とおく. $\partial S = C$ および $\text{rot}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ に注意する. ストークスの公式より

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \mathbf{0} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

問題 0711-VII.

積分

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x (1 - xy) dy dx$$

を計算せよ.

略解.

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x (1 - xy) dy dx = \int_0^1 \left[y - \frac{1}{2}xy^2 \right]_{y=x^2}^x dx = \int_0^1 \left(x - x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^5 \right) dx = \frac{1}{8}$$

問題 0711-VIII.

立方体 $Q := \{|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$ の表面 S を原点側が裏面であると考えて正の単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ と書くとき, ベクトル場

$$\mathbf{F}(x, y, z) := x^3\mathbf{i} + z^3\mathbf{k}$$

の面積分

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

を求めよ. ただし, dS は面積要素を表す.

略解. $\operatorname{div} \mathbf{F} = 3(x^2 + z^2)$ である. ガウスの発散定理より

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 3(x^2 + z^2) dx dy dz = \cdots = 16$$

問題 0711-IX.

立方体 $Q := \{|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$ の表面 S を原点側が裏面であると考えるとき, ベクトル場

$$\mathbf{F}(x, y, z) := \sin^2 x \mathbf{i} - y \sin 2x \mathbf{j} + 5z \mathbf{k}$$

の面積分

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

を求めよ. ただし, dS は面積要素, $\mathbf{n}$ は裏面から表面へと向かう単位法線ベクトル.

略解. $\operatorname{div} \mathbf{F} = 2 \sin x \cos x - \sin 2x + 5 = 5$ である. ガウスの発散定理より

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz = 5 \times (\text{立方体の体積}) = 5 \cdot 2^3 = 40$$

問題 0711-X.

ベクトル場

$$\mathbf{F} := y^2 \mathbf{i} + z^2 \mathbf{j} + x^2 z \mathbf{k}$$

の面積分

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

を計算せよ. ここで, 曲面 S は 1 つの円柱面と 4 つの平面で区切られた $x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, |z| \leq 1$ の表面であり, $\mathbf{n}$ は S の外向き単位法線ベクトル, dS は面積要素を表す.

略解. $V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, |z| \leq 1\}$ とおく. $\partial V = S$ である. また $\operatorname{div} \mathbf{F} = x^2$ である. ガウスの発散定理から

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz = \iiint_V x^2 dx dy dz \quad (\spadesuit)$$

ここで変数変換

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

を行うとこの変換のヤコビ行列式は

$$\begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

であるので

$$\begin{aligned} (\spadesuit) &= \int_{-1}^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^2 \cos^2 \theta r dr d\theta dz = 4 \int_{-1}^1 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \\ &= 4 \int_{-1}^1 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta dz = \int_{-1}^1 [2\theta + \sin 2\theta]_0^{\pi/2} dz = \pi \int_{-1}^1 dz = 2\pi \end{aligned}$$

問題 0711-XI.

ベクトル場

$$\mathbf{F} := x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + x^2y^2\mathbf{k}$$

と曲面

$$S : \mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + e^{uv}\mathbf{k}, \quad -1 \leq u \leq 1, \quad -1 \leq v \leq 1$$

について積分

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

を求めよ。ただし、 S の面積要素を dS によって、またその単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ によって表し、 $\mathbf{n}$ は $\mathbf{k}$ 成分が正であるように選んであるものとする。

略解. $\mathbf{r}_u = \mathbf{i} + ve^{uv}\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_v = \mathbf{j} + ue^{uv}\mathbf{k}$ であり,

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & ve^{uv} \\ 0 & 1 & ue^{uv} \end{vmatrix} = -ve^{uv}\mathbf{i} - ue^{uv}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

である。従って

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS &= \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) dudv \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 {}^t(u, -v, u^2v^2) \cdot {}^t(-ve^{uv}, -ue^{uv}, 1) dudv \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u^2v^2 dudv = \left(\int_{-1}^1 u^2 du \right)^2 = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

問題 0711-XII.

曲面

$$S_1 : x^2 + y^2 = z, z \leq \frac{1}{2}, \quad S_2 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$$

はそれぞれ $z > 0$ 側あるいは原点側が裏面であるとする. これらの曲面の裏面から表面に向かう単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ と書くとき, ベクトル場

$$\mathbf{F} := \sin^2 x \mathbf{i} - z(1 + \sin 2x) \mathbf{k}$$

の積分

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

を計算せよ. それぞれの積分において dS は面積要素を表す.

略解. $V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z, 0 \leq z \leq \frac{1}{2}\}$ とおく. $\partial V = S_1 + S_2$ である. また $\operatorname{div} \mathbf{F} = -1$ である. 従ってガウスの発散定理より

$$\iint_{S_1+S_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dxdydz = - \iiint_V dxdydz = -(V \text{ の体積}) \quad (\diamond)$$

である. ここで V の体積は $z = \frac{1}{2} - x^2 - y^2$ のグラフと xy 平面に囲まれた部分の体積に等しいので

$$(\diamond) = - \int_{x^2+y^2 \leq 1/2} \left(\frac{1}{2} - x^2 - y^2\right) dxdy = - \int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} - r^2\right) r dr d\theta = -\frac{\pi}{8}$$

問題 0711-XIII.

ベクトル場

$$\mathbf{F}(x, y, z) := 2z\mathbf{i} + 8x\mathbf{j}$$

があるとき, 長方形 $R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, y = z\}$ 上での積分

$$\iint_R \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

を計算せよ. ただし, $\mathbf{n}$ は R の単位法線ベクトルで, その $\mathbf{k}$ 成分は正であるとする. また dS は R の面積要素である.

略解. 問題 0627 の解答を参照してください.

問題 0718-I.

関数

$$z = f(x, y) = \log(x^2 + y^2) + xy^3$$

と曲線

$$C_1 : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \mathbf{j} \quad (-1 \leq t \leq 1), \quad C_2 : \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (2 - t^2)\mathbf{j} \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

について積分

$$\int_{C_1-C_2} \frac{\partial z}{\partial n} ds$$

を評価せよ。ただし、曲線 $C_1 - C_2$ の法線ベクトルはその接ベクトルを左から右に横切るようにとられてあるものとする。 $\frac{\partial z}{\partial n}$ は z の法線方向微分、 ds は曲線の線素を表す。

略解. $D = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2 - x^2\}$ とおく。このとき $\partial D = C_1 - C_2$ である。方向微分の性質および 2 次元のガウスの発散定理より

$$\int_{C_1-C_2} \frac{\partial z}{\partial n} ds = \int_{C_1-C_2} \text{grad} f \cdot \mathbf{n} ds = \iint_D \text{div}(\text{grad} f) dx dy \quad (\heartsuit)$$

である。ここで

$$\text{grad} f = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} + y^3, \frac{2y}{x^2 + y^2} + 3xy^2 \right), \quad \text{div}(\text{grad} f) = 6xy$$

より

$$(\heartsuit) = \int_{-1}^1 \int_1^{2-x^2} 6xy dx dy = \int_{-1}^1 [3xy^2]_{y=1}^{2-x^2} dx = \int_{-1}^1 3x\{(2-x^2)^2 - 1\} dx = 0$$

問題 0718-II.

ベクトル場

$$\mathbf{F} := x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$$

の平面曲線

$$C : y = 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1$$

に沿う線積分

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

を求めよ。

略解. 曲線 C は $\mathbf{r}(t) = (t, 1 - t^2) \quad (-1 \leq t \leq 1)$ とパラメータ表示できる。よって $\mathbf{r}'(t) =$

$(1, -2t)$ より

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-1}^1 (t^2, (1-t^2)^2) \cdot (1, -2t) dt = \int_{-1}^1 t^2 - 2t(1-t^2)^2 dt = \frac{2}{3}$$

問題 0718-III.

平面上の 3 点 $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$ によって作られる 3 角形の周を反時計回りにまわる曲線を C で表すとき、ベクトル場

$$\mathbf{F} := 2xy\mathbf{i} + (e^x + x^2)\mathbf{j}$$

の積分

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} ds$$

を計算せよ。ただし、 $\mathbf{t}$ は単位接ベクトル、 s は弧長の径数を表す。

略解.

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} ds = \int_C 2xy dx + (e^x + x^2) dy \quad (b)$$

である。ここで $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ とおくと $\partial D = C$ である。従ってグリーンの公式から

$$(b) = \iint_D (e^x + 2x - 2x) dx dy = \int_0^1 \int_0^x e^x dy dx = \int_0^1 x e^x dx = [x e^x - e^x]_0^1 = 1$$

問題 0718-IV.

ベクトル場

$$\mathbf{F} := \mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$$

と曲面

$$S : \mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + uv\mathbf{k}, \quad 0 \leq u \leq v, \quad 0 \leq v \leq 1$$

について積分

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

を求めよ。ただし、 S の単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ はその $\mathbf{k}$ 成分が正であるようにとられているものとする。また、 dS は面積要素を表す。

略解. $\mathbf{r}_u = (1, 0, v)$, $\mathbf{r}_v = (0, 1, u)$ である. よって

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u \end{vmatrix} = -v\mathbf{i} - u\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

となる. 従って

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_0^1 \int_0^v (1, u^2, u^2 v^2) \cdot (-v, -u, 1) dudv = \int_0^1 \int_0^v (-v - u^3 + u^2 v^2) dudv \\ &= \int_0^1 \left(-v^2 - \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{3}v^5 \right) dv = -\frac{59}{180} \end{aligned}$$

問題 0718-V.

ベクトル場

$$\mathbf{F} := e^y \mathbf{i} - e^z \mathbf{j} + e^x \mathbf{k}$$

の面積分

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

を計算せよ. ここで, 曲面 S は領域 $V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq 9, x > 0, y > 0, 0 < z < 2\}$ の表面積を表し, $\mathbf{n}$ は S の外向き単位法線ベクトルを表す. また dS は面積要素を表す.

略解. $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ である. ガウスの発散定理から

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz = \iiint_V 0 dx dy dz = 0$$

問題 0704.

教科書第 7 章章末問題から

1. 問題 7.1
2. 問題 7.2

略解. 1. 「正解・略解」 p.7 (7.1) を参照. 2. 「正解・略解」 p.7 (7.2) を参照.

注意. グリーンの公式, ストークスの公式, ガウスの発散定理がどのような領域上や曲面上で成り立つのかを整理してみることを勧めます. 例えばグリーンの公式やストークスの公式は C や ∂S が閉曲線するとき, ガウスの発散定理は V が立方体や球のようなもので成り立ちますが, そうでないときこれらの公式が成り立つとは限りません. (div や rot が零だったとしても積分が 0 とは限らない.) この場合は定義に従って計算するしかありません.