ε-N 論法について

導入

数列 $\{a_n\}$ が $n \to \infty$ のとき α に収束することを，高校の数 III では次のように習います：

(A) n を限りなく大きくしたとき，a_n が α に限りなく近づく

一方，大学の解析学のテキストでは次のように定義されています：

(B) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある整数 N が存在し，$n > N$ のとき $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ

もちろん最初に定義 (B) を見たときはちんぷんかんぷんであり，色々な解析学の本を紐解いてみました．すると電卓を利用したものや，数直線・n-a_n プロット図などでわかりやすく説明しようと努力の跡が見られました．しかし，それらの本に共通していたことはあくまでも定義 (B) の意味を説明しようとするものでした．僕が疑問に思ったのは果たして今まで直感的に思っていた定義 (A) と (B) は同じことを意味するのか？ということでした．これについて 4 年間考え，一応納得する答えが得られたのでここに文章としてまとめておこうと思います.

高校数 III における問題点

最初になぜ (A) では不十分かということを説明します．次の質問を考えてみましょう：

質問 1．西条と市内は近いかどうか.

市内から電車通学していると遠いと感じるでしょうが，東京よりは西条のほうが広島市内に近いはず $\cdots$．さらに，次の質問も考えてみましょう：

質問 2． 1 万は大きいかどうか.

そんなの人によって感じ方は違うはず！つまり定義でただ単に「近い」とか「大きい」とかの表現を使うのはまずいということです.

直感を論理に変える

最初に数学以外の例を考えてみましょう：

(1) 北島は泳ぐのが速い.

この文は前節の内容から真が偽かが決められない (命題になっていない) ということがわかります．では次の文はどうでしょうか：

(2) 北島はハンセンよりも泳ぐのが速い.

これは真か偽かがはっきりしています．つまり相対的な表現には比べる対象が必要なわけです．では比べる対象を全対象にしたらどうなるでしょうか：

(3) 北島は誰よりも泳ぐのが速い.

一見すると (1) と同じようになりましたが，これは真偽がはっきりしています．つまり (1) をほんの少し変えて (3) にしただけで厳密になっているのです．実は (A) と (B) もこれぐらいの差であるということがこの文章の後半でわかるでしょう.

誰が見ても近いとは

そのために多少 (A) を言い換えてみましょう．数直線上の点 a_n と α の距離は $|a_n-\alpha|$ であることは知っているでしょう．つまり，次のように言い換えられます：

(A′) n を限りなく大きくしたとき，$|a_n-\alpha|$ が限りなく小さくなる.

さて，まずは後半を厳密にしてみましょう．ここでは「距離」を問題にしているので，比較する対象は全ての正の数です．つまり

(C) どんな正の数 $\varepsilon>0$ についても n を大きくすると $|a_n-\alpha|<\varepsilon$ とできる.

これを ε 論法という場合もあります.

ε-N 論法における正確な定義

ここで「n を大きくすると」というのが問題になります．そこで次のように言い換えてみましょう：

(D) どんな正の数 ε に対しても n がある大きな番号 N よりも大きければ $|a_n-\alpha|<\varepsilon$ となる.

さて，N はどんな数なのでしょうか．それは ε に依存しています．つまり ε を小さくすると，条件「$|a_n-\alpha|<\varepsilon$」を満たす n の数は少なくなるので N は大きくなることが予想されます．しかし ε をひとつ決めたら，N を決めることができるはずです.（でないと $|a_n-\alpha|<\varepsilon$ を満たさない n が無限にあることになります.）これを文にしたものが (B) なわけです.

終わりに

ここまで結構工夫して高校での定義 (A) と定義 (B) が同じことを意味しているのを説明してまいりましたがいかがだったでしょうか.

平成 18 年 2 月　秋田 智之