応用数学総合

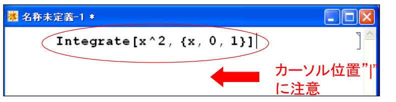
（問題解決型演習）

非線形2階常微分方程式

広島大学 大学院理学研究科

秋田 智之

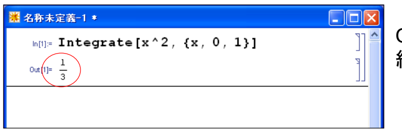
基本操作：入出力



コマンドを入力

[Shift]＋[Enter]

を同時にたたく



Out[•]=…として
結果を出力

Chapter 1
Mathematica入門

ここでは入力例を列挙する.

実際にMathematicaに入力し，出力結果を確かめてみよう.

1. 数値計算

In[1]:=5+7

In[2]:=2*3 (*2 3でもよい*)

In[3]:=14/3

In[4]:=3^50

In[5]:=N[%] (*%は直前の出力を表す*)

In[6]:=N[Pi,50] (*Piは円周率*)

In[7]:=Sin[Pi/2]

In[8]:=N[Exp[Log[2]]]

2. 線形代数

In[1]:=a={{3,1},{5,2}} $\leftarrow a = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

In[2]:=b={{2,-1},{-5,3}}

In[3]:=a.b (*aとbの行列積*)

In[4]:=Inverse[a] (*aの逆行列*)

In[5]:=Det[a] (*aの行列式*)

In[6]:=Transpose[a] (*aの転置行列*)

In[7]:=Eigenvalues[a] (*aの固有値*)

In[8]:=Eigenvectors[a] (*aの固有ベクトル*)

3. 微分積分

In[1]:=D[x^2+Cos[x],x] $\leftarrow \frac{d}{dx}(x^2+\cos x)$

In[2]:=Series[Sin[x],{x,0,10}]

←0のまわりでsin x を10次までTaylor展開

In[3]:=Integrate[1/(1+x^2),x]

$\leftarrow \int \frac{1}{1+x^2}dx$

In[4]:=Integrate[Exp[-x^2],{x,0,Infinity}]

$\leftarrow \int_0^\infty e^{-x^2}dx$

In[5]:=Sum[1/n^2,{n,1,Infinity}] $\leftarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

4. 微分方程式

例1. 微分方程式の一般解

等号は==

In[1]:=DSolve[y'[x]-2*y[x]==Exp[x],y[x],x]

(*←文法:DSolve[方程式,未知関数,変数]*)

Out[1]:= {{y[x]→-e^{x}+e^{2x} C[1]}}

例2. 初期値問題の解

In[2]:=DSolve[{y'[x]-2*y[x]==Exp[x],y[0]==1},y[x],x]

Out[2]:={{y[x]→e^{x}(-1+2e^{x})}}

(*←文法:DSolve[{方程式,初期値},未知関数,変数]*)

Chapter 2 微分方程式の数値解とグラフ

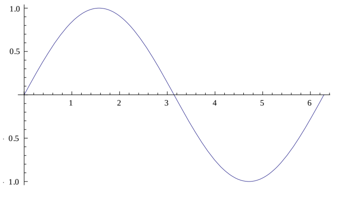
ここでは解析的に解けない微分方程式をMathematicaで数値的に解き,それをグラフにしてみよう

5. *y*=*f*(*x*)のグラフ

In[1]:=Plot[Sin[x],{x,0,2*Pi}]

(*←文法:Plot[関数,{変数,どこから,どこまで}]*)

Out[1]:=



6. Evaluateとは?

In[1]:=DSolve[{y'[x]-2*y[x]==Exp[x],y[0]==1},y[x],x]

Out[1]:={{y[x]→e^{x}(-1+2e^{x})}}

(*出力がe^{x}(-1+2e^{x})ならPlotでグラフが描けるが…*)

そのままでは Plotでグラフが 描けない

解決策:Evaluateを使う

In[2]:=Evaluate[y[x] /. %]

(*前の出力%を無理やり代入(/.)する*)

Out[2]:= {e^{x}(-1+2e^{x})}

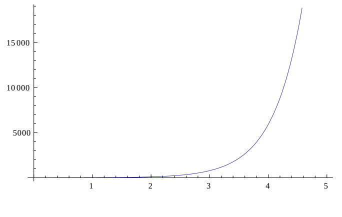
7. 微分方程式の解のグラフ

In[1]:=DSolve[{y'[x]-2*y[x]==Exp[x],y[0]==1},y[x],x]

Out[1]:={{y[x]→e^{x}(-1+2e^{x})}}

In[2]:=Plot[Evaluate[y[x]/.%],{x,0,5}]

Out[2]:=



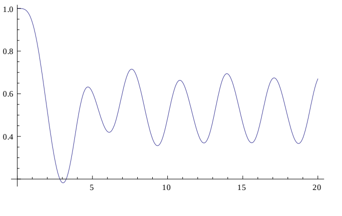
8. 微分方程式の数値解とグラフ

In[1]:=NDSolve[{y''[x]+Sin[x]^2*y'[x]+y[x]==Cos[x]^2,y[0]==1
,y'[0]==0},y[x],{x,0,20}]

Out[1]:= {{y[x]→InterpolatingFunction[{{0.,20.}},<>][x]}}

In[2]:=Plot[Evaluate[y[x]/.%],{x,0,20}]

Out[2]:=

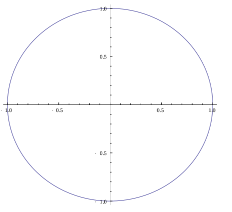


Chapter 3
微分方程式の相平面

相平面は微分方程式の解の振る舞いを調べる幾何的な方法である.

9. 媒介変数表示された曲線

In[1]:=ParametricPlot[{Cos[t],Sin[t]},{t,0,2*Pi}]
(*←文法：ParametricPlot[{x成分,y成分},{変数,どこから,どこまで}]*)
Out[1]:=



$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

10. 微分方程式の相平面(1)

(*van der Pol方程式（ε=1）の相平面を描く*)

$$\frac{d^2u}{dt^2} = (1-u^2)\frac{du}{dt} - u$$

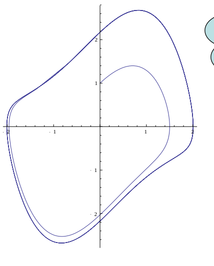
(*相平面を描くにはまず一階化を行う*)

$$\frac{du}{dt} = v, \ \frac{dv}{dt} = (1-u^2)v - u$$

In[1]:=sol=NDSolve[{u'[t]==v[t], v'[t]==(1-u[t]^2)*v[t]-u[t], u[0]==0, v[0]==1},{u,v},{t,0,30}]
Out[1]:=
{{u→InterpolatingFunction[{{0.,30.}},<>],v→InterpolatingFunction[{{0.,30.}},<>]}}

10. 微分方程式の相平面(2)

In[2]:=ParametricPlot[Evaluate[{u[t],v[t]} /. sol],{t,0,30}]
Out[2]:=

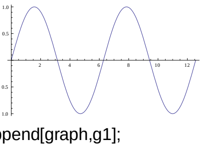


solの変わりに%1とすればOut[1]の出力が代入される

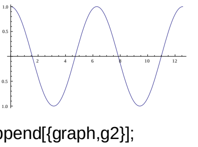
tが大きいとき閉曲線になる（極限周期解）

11. グラフの重ね書き

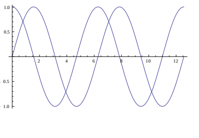
(*グラフを重ね書きにはグラフをリストに代入しShowを使う*)
In[1]:=graph={} (*空のリスト作成*)
Out[1]:={}
In[2]:=g1=Plot[Sin[t],{t,0,4*Pi}]
Out[2]:=



In[3]:=Append[graph,g1];
In[4]:=g2=Plot[Cos[t],{t,0,4*Pi}]
Out[5]:=



In[5]:=Append[{graph,g2}];
In[6]:=Show[graph]
Out[6]:=



12. 相平面の重ね書き

```
In[1]:=ph={};
In[2]:=Do[
  sol=NDSolve[{
  u'[t]==v[t],
  v'[t]==(1-u[t]^2)*v[t]-u[t],
  u[0]==RandomReal[{-4,4}],
  v[0]==RandomReal[{-4,4}]},
  {u,v},{t,0,30}];
  ph=Append[ph,
  ParametricPlot[
  Evaluate[{u[t],v[t]}/.sol],{t,0,30},
  PlotRange->{{-4,4},{-4,4}}]],
  {i,100}];
```
(*←文法：Do[処理,{i,100}]で処理を100回繰り返す*)
In[3]:=Show[ph]
Out[3]:=