論理学II（2005.01.26および02.02.）補足＆課題プリント

I. 多項述語

述語は，それにつく項の数によって，単項述語・多項述語（二項述語，三項述語・・・n項述語）に分類される．

1.単項述語

洋隆をa，「・・・は評論家である」をFとすると，

「洋隆は評論家である」は，Fa　［単称命題］

洋子をb，「・・・はよく笑う」をGとすると，

「洋子はよく笑う」は，Gb　［単称命題］

「すべての評論家はよく笑う」は，∀x(Fx⊃Gx)　［全称命題］

「ある評論家はよく笑う」は，∃x(Fx∧Gx)　［存在命題］

2.多項述語

それぞれの多項述語は，個体記号を置く順序が決まっている．

(a)二項述語

太郎をa，次郎をb，「・・・は・・・の兄である」をFとすると，

「太郎は次郎の兄である」は，Fab

ロシアをc，台湾をd，「・・・は・・・より広い」をGとすると，

「ロシアは台湾より広い」は，Gcd

(b)三項述語

太郎をa，洋子をb，次郎をc，「・・・は・・・を・・・に紹介する」をFとすると，

「太郎は洋子を次郎に紹介する」は，Fabc

名古屋をd，東京をe，大阪をf，「・・・は・・・と・・・の間にある」をGとすると，

「名古屋は東京と大阪の間にある」は，Gdef

(c)個体定項を含む二項述語

太郎をa，「・・・は・・・を愛している」をF，個体領域を人間の集合とすると，

「太郎はある人を愛している」は，$\exists xFax$

「ある人は太郎を愛している」は，$\exists xFxa$

「太郎はすべての人を愛している」は，$\forall xFax$

「すべての人は太郎を愛している」は，$\forall xFxa$

3.量化記号の順序

例えば，二項述語の場合，$\forall x\forall yFxy$ は，$\forall x(\forall yFxy)$ のカッコを省略したものである．(1)全称記号どうしの場合と(2)存在記号どうしの場合は，それらを入れ替えてもそれらの命題は等値である．

(1) $\forall x\forall yFxy$　「すべての人はすべての人を愛している」

$\forall y\forall xFxy$　「すべての人はすべての人を愛している」

個体領域を(a, b)として，上記の命題を展開すると，

$$
\begin{aligned}
\forall x\forall yFxy &\equiv \forall x(\forall yFxy)\\
&\equiv \forall yFay \land \forall yFby\\
&\equiv (Faa \land Fab) \land (Fba \land Fba)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\forall y\forall xFxy &\equiv \forall y(\forall xFxy)\\
&\equiv \forall xFxa \land \forall xFxb\\
&\equiv (Faa \land Fba) \land (Fab \land Fbb)
\end{aligned}
$$

$\therefore \forall x\forall yFxy \equiv \forall y\forall xFxy$

(2) $\exists x\exists yFxy$　「ある人はある人を愛している」

$\exists y\exists xFxy$　「ある人はある人を愛している」

問題3(2) 個体領域を(a, b)として，上記の(2)の命題を展開し，等値であることを示しなさい．

次に，全称記号と存在記号が混在する場合は，その順序の違いによって，命題の意味が異なることを示す．

(3) $\forall x\exists yFxy$　「すべての人はある人を愛している」

$\exists y\forall xFxy$　「ある人がすべての人によって愛されている」

個体領域を(a, b)として，上記の命題を展開すると，

$$
\begin{aligned}
\forall x\exists yFxy &\equiv \forall x(\exists yFxy)\\
&\equiv \exists yFay \land \exists yFby\\
&\equiv (Faa \lor Fab) \land (Fba \lor Fbb)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\exists y\forall xFxy &\equiv \exists y(\forall xFxy)\\
&\equiv \forall xFxa \lor \forall xFxb\\
&\equiv (Faa \land Fba) \lor (Fab \land Fbb)
\end{aligned}
$$

従って，等値ではない．

(4) $\exists x\forall yFxy$　「ある人はすべての人を愛している」
　　$\forall y\exists xFxy$　「すべての人はある人によって愛されている」

問題3(4) 個体領域を(a, b)として，上記の(2)の命題を展開し，等値でないことを示しなさい．

II. 同一性

1. 同一性の関係

(1)「Bolzanoは，Wissenschaftslehre(4Bde, 1837)の著者である」に関して，

Bolzano(ボルツァーノ)をa，Wissenschaftslehre(4Bde, 1837)の著者をbとすると，上記の文は，「aとbは同一である」と主張していることになる．これを同一性の関係と呼び，記号＝によって，

a＝b

と表すことにする．ところで，(2)「Bolzanoは，哲学者である」という場合，「・・・は哲学者である」をFという述語で表すと，

Fa

となるが，(1)の「・・・である」と(2)の「・・・である」は，意味が異なる．(1)は，同一性を表す「・・・である」であって，「aはbと同一（人物・もの）である」という意味であるが，(2)の「・・・である」には，同一性の関係を表しておらず，「aは，Fであらわされる集合に属する」という意味である．

さらに，数学では，＝ を等号と呼んで，例えば，二等辺三角形ABCの等しい二辺ABとACについて，

AB＝AC

と表記し，辺ABの長さと辺ACの長さが等しいことだけを表現している．これは，論理学で用いる同一性の ＝ とは意味がことなる．論理学の同一性の意味で理解すれ

ば，辺ABと辺ACが長さだけでなく，辺そのものが同一の辺であることになってしまうからである．

2. 同一性の記号化

(1)同一性は，反射性・対称性・推移性をもつ．

$a=a$　は，恒真である．

$\sim(a=b)$　を　$a\neq b$　と表記する．

$\forall x(x=x)$　「すべてのものは自分自身と同一である」（反射性）

$\forall x\forall y((x=y)\supset(y=x))$　（対称性）

$\forall x\forall y\forall z(((x=y)\wedge(y=z))\supset(x=z))$　（推移性）

(2)同一性の代入可能性

もし，a＝bであれば，aについて言えることは，bについても言える．

「Croceは，Filosofia dello Spirito(1902-1917)の著者である」

「Croceは，二度文部大臣になった」

Croce（クローチェ）をa，Filosofia dello Spirito(1902-1917)の著者をb，
「・・・は二度文部大臣になった」をFで表すと，

「Croce ＝ Filosofia dello Spirito(1902-1917)の著者」であれば，その場合，
「Croceは，二度文部大臣になった」が真であれば，
「Filosofia dello Spirito(1902-1917)の著者は，二度文部大臣になった」も真である．

$a=b, Fa \quad \therefore Fb$

これは，同一性の代入可能性を表わしている．より一般的には，次のように表現できる．

$\forall x\forall y((x=y)\supset(Fx\equiv Fy))$

これはまた，外延性の原理とも言われる．すなわち，二つのものが同一であれば，一方について成り立つことは，他方についても成り立つ，という原理である．

(3)数表現の記号化

「少なくとも一つのFがある」は，$\exists xFx$ と表現できた．

さらに，「少なくとも二つのFがある」は，＝の否定≠を用いて，次のように表現できる．

$\exists x \exists y(Fx \wedge Fy \wedge (x \neq y))$

「少なくとも三つのFがある」は，同様に次のようになる．

$\exists x \exists y \exists z(Fx \wedge Fy \wedge Fz \wedge (x \neq y) \wedge (x \neq z) \wedge (y \neq z))$

一般に，「少なくともn個のものがFである」は，次のようになる．

$\exists x_1 \cdots \exists x_n (Fx_1 \wedge \cdots \wedge Fx_n \wedge (x_1 \neq x_2) \wedge \cdots \wedge (x_1 \neq x_n) \wedge (x_2 \neq x_3) \wedge \cdots \wedge (x_2 \neq x_n) \wedge \cdots \wedge (x_{n-1} \neq x_n))$

また，「高々（多くても）一つのものがFである」は，「少なくとも二つのものがある」の否定だから，

$\sim \exists x \exists y(Fx \wedge Fy \wedge (x \neq y))$

となり，量化子を交換すると，次のようになる．

$\forall x \forall y((Fx \wedge Fy) \supset (x = y))$

一般に，「高々（多くても）n個のものがFである」は，次のようになる．

$\forall x_1 \cdots \forall x_{n+1}((Fx_1 \wedge \cdots \wedge Fx_{n+1}) \supset ((x_1 = x_2) \vee \cdots \vee (x_1 = x_{n+1}) \vee (x_2 = x_3) \vee \cdots \vee (x_2 = x_{n+1}) \vee \cdots \vee (x_n = x_{n+1})))$

また，「ちょうど（きっかり）一つのものがFである」は，「少なくとも一つの，そして，高々一つのものがFである」となるから，

$\exists xFx \wedge \forall x \forall y((Fx \wedge Fy) \supset (x = y))$

となる．これは，次のようにも記号化できる．

$\exists x(Fx \wedge \forall y(Fy \supset (x = y)))$

「ちょうど二つのものがFである」は，次のようになる．

$\exists x \exists y(Fx \wedge Fy \wedge (x \neq y) \wedge \forall z(Fz \supset ((z = x) \vee (z = y))))$

一般に，「ちょうどn個のものがFである」は，次のようになる．

$\exists x_1 \cdots \exists x_n(Fx_1 \wedge \cdots \wedge Fx_n \wedge (x_1 \neq x_2) \wedge \cdots \wedge (x_1 \neq x_n) \wedge (x_2 \neq x_3) \wedge \cdots \wedge (x_2 \neq x_n) \wedge \cdots \wedge (x_n \neq x_{n+1}) \wedge \forall x_{n+1}(Fx_{n+1} \supset (x_{n+1} = x_1) \vee \cdots \vee (x_{n+1} = x_n)))$

課題：問題3(2)および問題3(4)を解いて，2005年2月15日中にA663まで提出すること．問題の意味，解法について疑問がある場合は，2月15日までに直接質問に来ること．全部解けなくても，必ず提出すること．