述語論理 Predicate logic の導入

1. 命題論理から述語論理へ

推論(1)
　義昭は哲学者なら，腹が出ている.　　　　$p \supset q$
　義昭は哲学者である.　　　　　　　　　　p
∴義昭は腹が出ている.　　　　　　　　　$\therefore q$

推論(2)
　すべての哲学者は腹が出ている.　　　　p
　義昭は哲学者である.　　　　　　　　　　q
∴義昭は腹が出ている.　　　　　　　　　$\therefore r$

推論(3)
　義昭は腹が出ている.　　　　　　　　　　p
∴腹が出ている者が少なくとも一人いる.　$\therefore q$

命題論理では，論理分析の最小単位が真偽を問題にできる要素命題に制限されていたので，上記の推論(1)の妥当性を示すことはできるが，推論(2)(3)の妥当性に関しては，これを示すことができない．推論(2)(3)を扱うためには，要素命題の内部構造を分析する方法をとらなければならない（述語論理）．

2. 単称命題

個体定項：「義昭」のように特定の個体 individual を表わす．a, b, c など.
述語記号：「腹が出ている」のように個体の性質を表わす．F, G, H など.

「義昭」をa，「日本」をbで表わし，「・・・は腹が出ている」をF，「・・・は島国である」をGで表わすことにすると，以下のようになる（単称命題）．

(1)「義昭は腹が出ている」→ Fa
(2)「日本は島国である」→ Gb

単称命題は，真偽を確定し得る.

例　義昭か昭義が犯人だ.

「義昭」をa，「昭義」をb，「・・・が犯人だ」をFとすると，
「義昭か昭義が犯人だ」→ $Fa \vee Fb$

3. 命題関数 Propositional function

個体変項：不特定の個体を表わす．x, y, z など.

個体変項をx，yとし，「・・・は腹が出ている」をF，「・・・は島国である」をGで表わすことにすると，以下のようになる（命題関数）．

(1)「xは腹が出ている」→Fx
(2)「yは島国である」→ Gy

命題関数は，真偽を確定し得ないが，個体変項xを個体定項aに置き換えれば，Fa（単称命題）となり，真偽を確定し得る．

4. 量化記号 Quantifier

4-1. 全称記号 Universal quantifier と存在記号 Existential quantifier

全称記号　∀　「すべて」
存在記号　∃　「少なくともひとつ」

全称量化子　∀x　「すべてのxについて」
存在量化子　∃x　「少なくともひとつのxについて」

全称命題　∀xFx　「すべてのxについて，xはFである」・・・・・・・(1)
存在命題　∃xFx　「少なくともひとつのxについて，xはFである」・・(2)

(1)は，「すべてのxはFである」とも読まれる．
(2)は，「或るxはFである」あるいは「Fであるxが少なくともひとつ存在する」とも読まれる．
また，(2)は特称命題とも呼ばれる．

4-2. 個体領域

「すべてのxについて」あるいは「少なくともひとつのxについて」というときの，xがどの範囲に含まれる個体であるかをあらかじめ明らかにしておく必要がある．個体の存在する範囲を「個体領域」と呼ぶ．

例　変項xの個体領域を「学生からなる集合」とする．この場合，「・・・は学生である」という述語は不要になる．「・・・はアラブ語（アラビア語）ができる」をFとする．

(1)「すべての学生はアラブ語ができる」　→　∀x(xはアラブ語ができる)
　　　　　　　　　　　　　　　　　　　→　∀xFx
(2)「すべての学生はアラブ語ができない」　→　∀x～(xはアラブ語ができる)
　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　→　∀x～Fx
(3)「ある学生はアラブ語ができる」　→　∃x(xはアラブ語ができる)
　　　　　　　　　　　　　　　　　→　∃xFx
(4)「ある学生はアラブ語ができない」　→　∃x～(xはアラブ語ができる)
　　　　　　　　　　　　　　　　　　→　∃x～Fx

(5)「アラブ語のできる学生がいるかいないかだ」　→　∃xFx∨～∃xFx
(6)「すべての学生はアラブ語ができるかできないかだ」　→　∀x(Fx∨～Fx)

(5)(6)は，個体領域をどのように設定しても常に真である（恒真）が．(1)～(4)は，個体領域の設定の仕方によって真になったり偽になったりする（偶然的，事実的）．

4-3. 作用域

作用域：全称記号∀あるいは存在記号∃が，それに続く命題関数に作用する最小の範囲．

	量化子	作用域
(1) $\forall xFx$	$\forall x$	Fx
(2) $\exists xGx$	$\exists x$	Gx
(3) $\forall xFx \land \exists xGx$	$\forall x$	Fx
	$\exists x$	Gx
(4) $\forall x(Fx \land Gx)$	$\forall x$	$(Fx \land Gx)$

4-4. 自由変項 free variable と束縛変項 bound variable

自由変項：全称記号あるいは存在記号の作用域内にない変項．
束縛変項：全称記号あるいは存在記号の作用域内にある変項．

(1) $\forall xFx \land Gy$　・・・・・・・・・・・・xは束縛変項，yは自由変項．
(2) $\forall x(Fx \land Gx \land Hy)$　・・・・・・・・xは束縛変項，yは自由変項．
(3) $\forall x(Fx \land Gx \land \exists yHy)$
(4) $\forall xFx \supset \exists y(Gx \land Hy)$
(5) $\exists x((Fx \lor \forall xGx) \land \forall y(Gy \supset Hx))$

5. 命題の分類

命題
- 単称命題
  - (1)単称肯定命題　Fa
  - (2)単称否定命題　$\sim Fa$
- 量化命題
  - (3)全称肯定命題　$\forall xFx$
  - (4)全称否定命題　$\forall x \sim Fx$
  - (5)存在肯定命題　$\exists xFx$　（特称肯定命題）
  - (6)存在否定命題　$\exists x \sim Fx$　（特称否定命題）

6. 量化命題の有限解釈（個体領域が有限の場合）

例　個体領域：研究室のメンバー(a, b, c, d)
　　F：「・・・はアルバイトをしている」

(1)「研究室のすべてのメンバーはアルバイトをしている」
→　$\forall xFx$
→　$Fa \land Fb \land Fc \land Fd$

(2)「研究室のあるメンバーはアルバイトをしている」
→　$\exists xFx$
→　$Fa \lor Fb \lor Fc \lor Fd$

練習　個体領域を(a, b)として，以下の式を展開しなさい．

(1) $\forall xFx \supset \forall xGx$

(2) $\exists xFx \wedge \exists xGx$

(3) $\exists x(Fx \wedge Gx)$

7. 量化命題と否定

個体領域を鳥の集合，述語Fを「・・・は赤い」とする．

全称命題

(1) $\forall xFx$　「すべての鳥は赤い」

(2) $\sim\forall xFx$　「すべての鳥が赤い，というわけではない」

(3) $\forall x\sim Fx$　「すべての鳥は赤くない」

(4) $\sim\forall x\sim Fx$　「鳥はすべて赤くない，というわけではない」

存在命題

(5) $\exists xFx$　「赤い鳥がいる」

(6) $\sim\exists xFx$　「赤い鳥はいない」

(7) $\exists x\sim Fx$　「赤くない鳥がいる」

(8) $\sim\exists x\sim Fx$　「赤くない鳥はいない」

量化子と否定の関係

(a) $\forall xFx \equiv \sim\exists x\sim Fx$

(b) $\exists xFx \equiv \sim\forall x\sim Fx$

(c) $\sim\forall xFx \equiv \exists x\sim Fx$

(d) $\sim\exists xFx \equiv \forall x\sim Fx$

(a) $\forall xFx \equiv \sim\exists x\sim Fx$　について，個体領域を(a, b, c)として，両辺を展開する．

左辺$\equiv \forall xFx \equiv Fa \wedge Fb \wedge Fc$

右辺$\equiv \sim\exists x\sim Fx \equiv \sim(\sim Fa \vee \sim Fb \vee \sim Fc)$

$\equiv Fa \wedge Fb \wedge Fc$　［ド・モルガン］

$\therefore \forall xFx \equiv \sim\exists x\sim Fx$

練習　上にならって，(b)〜(d)についても，個体領域を(a, b, c)として，両辺を展開しなさい．

量化命題と連言

例）　F: 〜は白い，　G: 〜は丸い

(1) $\forall x(Fx \wedge Gx) \equiv \forall xFx \wedge \forall xGx$

（すべてのものが白くて丸い）≡（すべてのものが白くかつすべてのものが丸い）

個体領域を(a, b)とすると，

（左辺）$\equiv (Fa \wedge Ga) \wedge (Fb \wedge Gb) \equiv Fa \wedge Ga \wedge Fb \wedge Gb$

（右辺）$\equiv (Fa \wedge Fb) \wedge (Ga \wedge Gb) \equiv Fa \wedge Ga \wedge Fb \wedge Gb$

(2) $\exists x(Fx \wedge Gx) \supset (\exists x Fx \wedge \exists x Gx)$

（白くて丸いものがある）ならば（白いものがありかつ丸いものがある）

個体領域を(a, b)とすると，

（左辺）$\equiv (Fa \wedge Ga) \vee (Fb \wedge Gb)$

（右辺）$\equiv (Fa \vee Fb) \wedge (Ga \vee Gb)$
$\equiv ((Fa \vee Fb) \wedge Ga) \vee ((Fa \vee Fb) \wedge Gb)$　分配律10
$\equiv ((Fa \wedge Ga) \vee (Fb \wedge Ga)) \vee ((Fa \wedge Gb) \vee (Fb \wedge Gb))$　分配律11
$\equiv (Fa \wedge Ga) \vee (Fb \wedge Ga) \vee (Fa \wedge Gb) \vee (Fb \wedge Gb)$　結合律7
$\equiv (Fa \wedge Ga) \vee (Fb \wedge Gb) \vee (Fb \wedge Ga) \vee (Fa \wedge Gb)$　交換律6

ここで，$(Fa \wedge Ga) \vee (Fb \wedge Gb) \equiv p$，$(Fb \wedge Ga) \vee (Fa \wedge Gb) \equiv q$ とおくと，

（左辺）$\equiv p$，　（右辺）$\equiv p \vee q$

従って，（左辺）⊃（右辺）は，$p \supset (p \vee q)$

p	q	$p \supset (p \vee q)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	1

量化命題と選言

例）　F: 〜は白い，　G: 〜は黒い

(1) $\exists x(Fx \vee Gx) \equiv \exists x Fx \vee \exists x Gx$

（白か黒かであるものが存在する）≡（白いものが存在するか黒いものが存在する）

個体領域を(a, b)とすると，

（左辺）$\equiv (Fa \vee Ga) \vee (Fb \vee Gb) \equiv Fa \vee Ga \vee Fb \vee Gb \equiv Fa \vee Fb \vee Ga \vee Gb$

（右辺）$\equiv (Fa \vee Fb) \vee (Ga \vee Gb) \equiv Fa \vee Fb \vee Ga \vee Gb$

(2) $(\forall x Fx \vee \forall x Gx) \supset \forall x(Fx \vee Gx)$

（すべてのものが白いか，すべてのものが黒い）ならば
（すべてのものが白いか黒いかである）

個体領域を(a, b)とすると，

（左辺）$\equiv (Fa \land Fb) \lor (Ga \land Gb)$
$\equiv ((Fa \land Fb) \lor Ga) \land ((Fa \land Fb) \lor Gb)$　分配律
$\equiv ((Fa \lor Ga) \land (Fb \lor Ga)) \land ((Fa \lor Gb) \land (Fb \lor Gb))$　分配律
$\equiv (Fa \lor Ga) \land (Fb \lor Ga) \land (Fa \lor Gb) \land (Fb \lor Gb)$　結合律
$\equiv (Fa \lor Ga) \land (Fb \lor Gb) \land (Fb \lor Ga) \land (Fa \lor Gb)$　交換律

（右辺）$\equiv (Fa \lor Ga) \land (Fb \lor Gb)$

ここで，$(Fa \lor Ga) \land (Fb \lor Gb) \equiv p$，$(Fb \lor Ga) \land (Fa \lor Gb) \equiv q$とおくと，

（左辺）$\equiv p \land q$，　（右辺）$\equiv p$

従って，（左辺）⊃（右辺）は，$(p \land q) \supset p$

p	q	$(p \land q) \supset p$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	1

量化命題と条件法

例）　F: ～は白い，　G: ～は丸い

(1) $\exists x(Fx \supset Gx) \equiv (\forall x Fx \supset \exists x Gx)$

（白いなら丸いというものが存在する）
≡（すべてのものが白いならば，ある丸いものが存在する）

個体領域を(a, b)とすると，

（左辺）$\equiv \exists x(\sim Fx \lor Gx)$　条件法の定義17
$\equiv (\sim Fa \lor Ga) \lor (\sim Fb \lor Gb) \equiv \sim Fa \lor Ga \lor \sim Fb \lor Gb \equiv \sim Fa \lor \sim Fb \lor Ga \lor Gb$

（右辺）$\equiv \sim \forall x Fx \lor \exists x Gx$　条件法の定義
$\equiv \exists x \sim Fx \lor \exists x Gx$　[← $\sim \forall x Fx \equiv \exists x \sim Fx$]
$\equiv (\sim Fa \lor \sim Fb) \lor (Ga \lor Gb) \equiv \sim Fa \lor \sim Fb \lor Ga \lor Gb$

(2) $(\exists x Fx \supset \forall x Gx) \supset \forall x(Fx \supset Gx)$

（あるものが白いならばすべてのものが丸い）ならば（すべてのものは白ければ丸い）

個体領域を(a, b)とすると，

（左辺）$\equiv \sim \exists x Fx \vee \forall x Gx$　条件法の定義
$\equiv \forall x \sim Fx \vee \forall x Gx$　[← $\sim \exists x Fx \equiv \forall x \sim Fx$]
$\equiv (\sim Fa \wedge \sim Fb) \vee (Ga \wedge Gb)$

（右辺）$\equiv \forall x(\sim Fx \vee Gx)$　条件法の定義
$\equiv (\sim Fa \vee Ga) \wedge (\sim Fb \vee Gb)$
$\equiv ((\sim Fa \vee Ga) \wedge \sim Fb) \vee ((\sim Fa \vee Ga) \wedge Gb)$　分配律
$\equiv ((\sim Fa \wedge \sim Fb) \vee (Ga \wedge \sim Fb)) \vee ((\sim Fa \wedge Gb) \vee (Ga \wedge Gb))$　分配律
$\equiv (\sim Fa \wedge \sim Fb) \vee (Ga \wedge \sim Fb) \vee (\sim Fa \wedge Gb) \vee (Ga \wedge Gb)$　結合律
$\equiv (\sim Fa \wedge \sim Fb) \vee (Ga \wedge Gb) \vee (Ga \wedge \sim Fb) \vee (\sim Fa \wedge Gb)$　交換律

ここで，$(\sim Fa \wedge \sim Fb) \vee (Ga \wedge Gb) \equiv p$，$(Ga \wedge \sim Fb) \vee (\sim Fa \wedge Gb) \equiv q$ とおくと，

（左辺）$\equiv p$，（右辺）$\equiv p \vee q$

従って，（左辺）⊃（右辺）は，$p \supset (p \vee q)$

p	q	$p \supset (p \vee q)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	1

量化命題の一般的表現(1)(2)

・有限な個体領域ならば，全称命題は連言(∧)で展開できる．
存在命題は選言(∨)で展開できる．
しかし，
・一般化すると，この手法はとれないので，次の手法をとる．

全称命題：全称記号のあとに，条件文を従える．
存在命題：存在記号のあとに，連言文を従える．

(1) 全称肯定命題　∀と⊃

「すべての学生はアラブ語ができる」
→すべてのxについて，xが学生であるならば，xはアラブ語ができる．
→すべてのxについて，(xは学生である)⊃(xはアラブ語ができる)
→ $\forall x(Fx \supset Gx)$
但し，F: ・・・は学生である，G: ・・・はアラブ語ができる

Nota Bene　$\forall x(Fx \supset Gx) \equiv \forall x(\sim Fx \vee Gx)$ と $\forall x(Fx \wedge Gx)$ は異なる．

問題　$\forall x(Fx \wedge Gx)$ を日常言語（日本語）で表現せよ．

(2) 存在肯定命題　∃と∧

「ある学生はポーランド語ができる」
→あるxについて，xは学生であって，かつ，xはポーランド語ができる．
→あるxについて，(xは学生である)∧(xはポーランド語ができる)
→$\exists x(Fx \land Gx)$
但し，F:・・・は学生である，G:・・・はポーランド語ができる

N.B.　$\exists x(Fx \land Gx)$　と　$\exists x(Fx \supset Gx) \equiv \exists x(\sim Fx \lor Gx)$　は異なる．

問題　$\exists x(Fx \supset Gx)$ を日常言語（日本語）で表現せよ．

量化命題の一般的表現(3)(4)

(3) 全称否定命題　∀と⊃と～

「すべての学生はチェコ語ができない」
→すべてのxについて，xが学生であるならば，xはチェコ語ができない．
→すべてのxについて，(xが学生である)⊃～(xはチェコ語ができる)
→ $\forall x(Fx \supset \sim Gx)$
但し，F:・・・は学生である，G:・・・はチェコ語ができる

N.B. $\forall x(Fx \supset \sim Gx)$ と $\sim \forall x(Fx \supset Gx)$ は異なる．

問題　$\sim \forall x(Fx \supset Gx)$ を日常言語（日本語）で表現せよ．

(4) 存在否定命題　∃と∧と～

「ある学生はチベット語ができない」
→あるxについて，xは学生であって，かつ，xはチベット語ができない．
→あるxについて，(xは学生である)∧～(xはチベット語ができる)
→ $\exists x(Fx \land \sim Gx)$
但し，F:・・・は学生である，G:・・・はチベット語ができる

N.B. $\exists x(Fx \land \sim Gx)$ と $\sim \exists x(Fx \land Gx)$ は異なる．

問題　$\sim \exists x(Fx \land Gx)$ を日常言語（日本語）で表現せよ．

問題　量化命題の一般的表現(1)～(4)に従って，次の文を記号化せよ（使用する記号は各自で定義せよ）．

(1) 義昭は束大卒（たばだい）卒だが，腹が出ている．

(2) 足は速いが，野球はできない者がいる．

(3) 足の速い者はみんな野球ができない．

(4) ある学生はチェロかピアノを弾く．