述語論理における恒真・恒偽の判定～真理値割り当ての方法

1. 基本方針

量化命題のなかに現れる個体変項をすべて個体定項に変え，その真偽を判定する（つまり，量化命題はその量化記号をすべて外し，単称命題にする）．結果的には，４種類の量化命題はすべて単称命題になる．その際，全称命題と存在命題のちがい，肯定命題と否定命題の違いは，量化命題を単称命題に転換する手続きの違いとなる．

2. 真理値割り当ての手順

判定されるべき複合命題を A とする．（恒真か否かを判定する）恒真テストであれば，A に0（恒偽テストであれば1)を割り当て，命題論理の場合と同様にして真理値を割り当てていく．その際，

1) すべての系列において矛盾が生じるならば，その命題は恒真（恒偽）である．
2) 少なくとも一つの系列において，すべての命題に対する真理値の割り当てに矛盾が生じないならば，その命題は恒真（恒偽）ではない．

述語論理の場合，真理値を割り当てながら，同時に，量化命題を単称命題に転換していかなくてはならない．例えば，判定されるべき複合命題 A が，∀xFxまたは∃xFxを含んでいるとすると，その転換のプロセスは，次の４つのステップに分かれる．

step(1)：量化記号を外さないままで真理値の割り当てを完了しておく．

$$\forall xFx \supset \exists xFx \quad \rightarrow \quad \underset{0}{\forall xFx \supset \exists xFx}$$

$$\rightarrow \quad \underset{1}{\forall xFx}, \ \underset{0}{\exists xFx}$$

step(2)：真理値1 の全称命題と真理値0 の存在命題から量化記号を外す（u は任意の個体を表わす）．

(a) 真理値1 の全称量化子消去　$\underset{1}{\forall xFx} \rightarrow \underset{1}{Fu}$

(b) 真理値0 の存在量化子消去　$\underset{0}{\exists xFx} \rightarrow \underset{0}{Fu}$

step(3)：真理値0 の全称命題と真理値1 の存在命題から量化記号を外す．

(a) 真理値0 の全称量化子消去　$\underset{0}{\forall xFx} \rightarrow \underset{0}{Fa}$　（ただしa は未出であること）

(b) 真理値1 の存在量化子消去　$\underset{1}{\exists xFx} \rightarrow \underset{1}{Fa}$　（ただしa は未出であること）

step(4)：命題関数の自由変項を既出のすべての個体定項に置き換える（個体定項が未出であれば，任意に個体定項，例えばa を代入する）．

step(1)は命題論理における真理値割り当てと同様である．step(2)以下が量化命題および命

題関数に真理値を割り当てる仕方である．step(2)以下を次に詳論する．

step(2)-(a) 真理値1 の全称量化子消去　∀xFx　→　Fu
1　1

個体領域を「鳥」，F を「・・・は赤い」とする．∀xFxが1 であれば，「すべての鳥は赤い」は真である．そして，すべての鳥が赤いならば，任意のどの鳥も赤いから，Fu つまり「任意のものu は赤い」の真理値は1 である．

step(2)-(b) 真理値0 の存在量化子消去　∃xFx　→　Fu
0　0

∃xFxが0 であれば，「ある鳥は赤い」は偽である．つまり，赤い鳥は存在しない．従って，赤い鳥が存在しなければ，任意の鳥が赤いとは言えないので，Fu は0 である．

step(3)-(a) 真理値0 の全称量化子消去　B，∀xFx　→　Fa
0　0
（ただしa はB に現れない）

∀xFx が 0 であれば，「すべての鳥は赤い」は偽である．つまり赤くない鳥が少なくとも一羽存在する．その一羽をa とすると，Fa は 0 になる．またa はB に現れてはならない（その理由については，次のstep(3)-(b)で述べる）．

step(3)-(b) 真理値1 の存在量化子消去　B，∃xFx　→　Fa
1　1
（ただしa はB に現れない）

∃xFxが1 であれば，「ある鳥は赤い」は真である．つまり，赤い鳥が少なくとも一羽存在する．その一羽をa とすると，Fa は 1 になる．
ここで，a はB に現れないという条件（変項条件）は以下の理由による．∃xFxが意味するのは，Fであるものが少なくとも一つ存在するということである．その一つのものをa とすると，a はF という性質をもちさえすればよい．ところが，a がB に現れているとしよう．例えば，B をGxとし，G を「・・・はトリインフルエンザに罹っている」とすると，Ga は aがトリインフルエンザに罹っているという性質をもつことを示している．これはa はF という性質をもちさえすればよいという条件の違反である．従って，a はB に現れてはならない．

step(4)　B，Fu　→　Fb　または　B，Fu　→　Fb　（bが既にB に現れている場合）
1　1　0　0

B，Fu　→　Fa　または　B，Fu　→　Fa　（個体定項がB に現れていない場合）
1　1　0　0

Fuが1 であれば，「xは赤い」はどの鳥にも言える．つまり既出の個体定項すべてについて言える．従って，xには既出の個体定項すべてを代入してよい．また既出の式に個体定項が現れない場合でも，同じ理由から任意の個体定項をx に代入してよい．Fu が0 の場合も同様である．

例題１［恒真の判定］ ∀xFx⊃Fa

∀xFx⊃Fa
0 step(1)より
(1) ∀xFx (1) Fa
1 0 step(1)より
(2) Fu
1 step(2)-(a)より
(3) Fa
× 1 step(4)より
∴ 恒真である．

例題２［恒真の判定］ Fa∨∃xFx

Fa∨∃xFx
0 step(1)より
(1) Fa (1) ∃xFx
0 0 step(1)より
(2) Fu
0 step(2)-(b)より
(3) Fa
○ 0 step(4)より
∴ 恒真でない．

例題３［恒真の判定］ ∀xFx⊃∃xFx

∀xFx⊃∃xFx
0
(1) ∀xFx (1) ∃xFx
1 step(1)より 0 step(1)より
(2) Fu (3) Fu
1 step(2)-(a)より 0 step(2)-(b)より
(4) Fa (5) Fa
1 step(4)より × 0 step(4)より

∴ 恒真である．

例題４［恒真の判定］ ∃xFx⊃∀x～Fx

∃xFx⊃∀x～Fx
0 step(1)より
(1) ∃xFx (1) ∀x～Fx
1 0 step(1)より
(2) Fa (3) ～Fb
1 step(3)-(b)より 0 step(3)-(a)より
(4) Fb
○ 1
∴ 恒真でない．

例題５［恒偽の判定］　Fa∧∃xFx

Fa∧∃xFx
　1

(1) Fa　　　　　　　(1) ∃xFx
　1　　　　　　　　　1　　　step(1)より
　　　　　　　　　(2) Fb
　　　　　　　　　○ 1　　　step(3)-(b)より
　　　　　　　　　∴ 恒偽でない.

例題６［恒偽の判定］　∀xFx∧∀x～Fx

∀xFx∧∀x～Fx
　1　　　　　　　　　　step(1)より

(1) ∀xFx　　　　　　(1) ∀x～Fx
　1　　　　　　　　　1　　　step(1)より
(2) Fu　　　　　　　(3) ～Fu
　1　　　　　　　　　1　　　step(2)-(a)より
(5) Fa　　　　　　　(4) ～Fa
　1　　　　　　　　　1　　　step(4)より
　　　　　　　　　(5) Fa
　　　　　　　　　× 0
　　　　　　　　　∴ 恒偽である.

例題７［恒真の判定］

(∃xFx∧∃xGx)⊃∃x(Fx∧Gx)
　　　0　　　　　　　　　step(1)より

(1) ∃xFx∧∃xGx　　　　(1) ∃x(Fx∧Gx)
　1　　　　　　　　　　0　　　step(1)より
(2) ∃xFx　(2) ∃xGx　(3) Fu∧Gu
　1　　　　1　　　　　0
(4) Fa　　(5) Gb　　(6) Fa∧Ga　|　(6) Fb∧Gb
　1　　　　1　　　　　0　　　　|　　0
　　　　　　　　(7) Fa　(7) Ga　|　(7) Fb　(7)Gb
　　　　　　　　　1　　○ 0　　|　　0　　　1
　　　　　　　　　　　　　　　　∴ 恒真でない.

(2)から(4)へ，および，(2)から(5)へは，Step(3)-(b)による.
(3)から(6)へは，Step(4)による.
(6)が二通り現れるのは，a と b が既に(4)と(5)に現れているからである.
(7)の Ga が 0 なのは，(4)で Fa が 1 と決まったからであり，(7)の Fb が 0 なのは，(5)で Gb が 1 と決まったからである.
Fa が 1 のとき，(5)の Gb と(7)の Ga は無矛盾である.