二項述語

1. 二項述語の真理値割り当ての方法

2. 二項述語の自然演繹法

1. 二項述語の真理値割り当ての方法

二項述語では，変項の順序に注意して，真理値を割り当てなければならない．その他は，次に述べる点を除けば，単項述語の場合と同様である．

ある二項述語Fに，任意の個体変項uが現れるとき，すなわち，

(1) ∀xFxyが１のときと，
(2) ∃xFxyが０のき，

まず，以下の操作(1)(2)(3)(4)をしてから，他の操作に移らなければならない．

(1) ∀xFxy → Fuy
　　　1　　　1

(a) それと同じ述語の同じ位置に既にある個体定項が現れているならば，それを任意野個体定項に代入する．

Fay，∀xFxy → Fuy→ Fay
　　　1　　　1　　1

(b) 複数の個体定項が既に現れている場合には，繰り返し代入する．

Fay，Fby，∀xFxy → Fuy→ Fay
　　　　　　1　　　1　　1
　　　　　　　　　　→Fby
　　　　　　　　　　　1

(c) 一つも個体定項が現れていない場合には，任意の個体定項を多項述語の変項に代入する．

Gx，Hy，∀xFxy → Fuy→ Fay
　　　　　1　　　1　　1

(2) ∃xFxy→ Fuy
　　　0　　0

(1)の(a)(b)(c)と同様に三通りの割り当てを区別しなければならない．

(a) Fay，∃xFxy→ Fuy→ Fay
　　　　　　0　　0　　0

(b) Fay， Fby，∃xFxy→ Fuy→ Fay
　　　　　　　　0　　0　　0
　　　　　　　　　　→Fby
　　　　　　　　　　　0

(c) Gx，Hy，∃xFxy→ Fuy→ Fay
　　　　　　0　　　0　　0

次の(3)(4)は単項述語の場合と同様である．

(3) ∃xFxy → Fay　（先行する式に個体定項aは現れない）
　　1　　1

(4) ∀xFxy → Fay　（先行する式に個体定項aは現れない）
　　1　　1

例１［恒真の判定］

∀x∀yFxy ⊃ ∀y∀xFxy
　　　0
(1) ∀x∀yFxy　　(2) ∀y∀xFxy
　　1　　　　　　0
(3) ∀yFuy　　　(4) ∀xFxa
　　1　　　　　　0
(5) Fuv　　　　(6) Fba
　1　　　　　　0
(7) Fbv
　1
(8) Fba
　1
∴恒真である.

(2)から(4)，(4)から(6)へは，操作の(4)による.
(5)から(7)，(7)から(8)へは，操作の(1)-(a)による.

例２［恒真の判定］

∃x∃yFxy ⊃ ∃y∃xFxy
　　　0
(1) ∃x∃yFxy　　(2) ∃y∃xFxy
　　1　　　　　　0
(3) ∃yFay　　　(4) ∃xFxu
　　1　　　　　　0
(5) Fab　　　　(6) Fvu
　1　　　　　　0
　　　　　　　(7) Fab
　　　　　　　　0
∴恒真である.

(1)から(3)，(3)から(5)へは，操作の(3)による.
(6)から(7)へは，操作の(2)-(a)による.

例３（問題）［恒真の判定］∃x∃yFxy ⊃ ∃xFxx

例４（問題）［恒真の判定］∀y∃xFxy ⊃ ∃x∀yFxy

2. 二項述語の自然演繹法

量化子が重なっている場合は，量化子の導入および消去は，その順序に留意しなければならない．

(1) $\forall_-$と$\exists_-$は外側から順に適用する．$\exists_-$は，変項条件に注意．

(a) ∀x∀yFxy → ∀yFay → Fab　［$\forall_-$を２回適用］
(b) ∃x∃yFxy → ∃yFay → Fab　［$\exists_-$を２回適用］

(2) $\forall_+$と$\exists_+$は内側から順に適用する．$\forall_+$は，変項条件に注意．

(c) Fuv → ∀xFxv → ∀y∀xFxy　［$\forall_+$を２回適用］
(d) Fuv → ∃xFxv → ∃y∃xFxy　［$\exists_+$を２回適用］

例１　∀x∀yFxy → ∀y∀xFxy

1(1) ∀x∀yFxy・・・・・仮定
1(2) ∀yFuy・・・・・・(1)$\forall_-$
1(3) Fuv ・・・・・・・ (2)$\forall_-$
1(4) ∀xFxv・・・・・・(3)$\forall_+$
1(5) ∀y∀xFxy ・・・・(4)$\forall_+$

(3)のu，vは(1)に現れていないので，変項条件を満たす．

例２　∃x∃yFxy → ∃y∃xFxy

1(1) ∃x∃yFxy・・・・・・仮定
2(2) ∃yFuy ・・・・・・・［仮定］
3(3) Fuv・・・・・・・・・［仮定］
3(4) ∃xFxv ・・・・・・・ (3)$\exists_+$
3(5) ∃y∃xFxy・・・・・・(4)$\exists_+$
2(6) ∃y∃xFxy・・・・・・(2)(3)(5)$\exists_-$
1(7) ∃y∃xFxy・・・・・・(1)(2)(6)$\exists_-$

(2)のuは(1)に対する任意の個体を，また，(3)のvは(2)に対する任意の個体を表す．従って，$\exists_-$は，(6)と(7)で２回適用しなければならない．

例３（問題）　∃x∀yFxy → ∀y∃xFxy

例４（問題）　すべての犬は生物である．
∴すべての犬の足は生物の足である．

F：～は犬である．
G：～は生物である．
H：～は～の足である．

∀x(Fx⊃Gx) → ∀x(∃y(Fy∧Hxy)⊃∃y(Gy∧Hxy))

1. 二項述語の真理値割り当ての方法

例３（問題）［恒真の判定］∃x∃yFxy ⊃ ∃xFxx

∃x∃yFxy ⊃ ∃xFxx
0
(1) ∃x∃yFxy　　(2) ∃xFxx
1　　0
(3) ∃yFay　　(5) Fuu
1　　0
(4) Fab　　(6) Faa　　(7) Fbb
1　　○ 0　　○ 0

∴恒真ではない．

(1)から(3)，(3)から(4)へは，操作の(3)による．
(5)から(6)，(5)から(7)へは，操作の(2)-(a)による．
(4)と(6)，また，(4)と(7)は，異なる命題であり，真理値が１と０でも矛盾しない．

例４（問題）［恒真の判定］∀y∃xFxy ⊃ ∃x∀yFxy

∀y∃xFxy ⊃ ∃x∀yFxy
0
(1) ∀y∃xFxy　　(2) ∃x∀yFxy
1　　0
(3) ∃xFxu　　(4) ∀yFvy
1　　0
(5) ∃xFxa　　(7) ∃xFxc　　(9) ∀yFby　　(11) ∀yFby
1　　1　　0　　0
(6) Fba　　(8) Fbc　　(10) Fbc　　(12) Fbe
1　　1　　○ 0　　○ 0

∴恒真ではない．

(3)から(5)，(3)から(7)へは，操作の(3)による．
(4)から(9)，(4)から(11)へは，操作の(4)による．
なお，この割り当ては，(1)の系列と，(2)の系列で無限に進行していく．
しかし，(6)と(10)，(8)と(12)，・・・という命題の組には矛盾はない．

2. 二項述語の自然演繹法

例３（問題）　∃x∀yFxy → ∀y∃xFxy

1(1) ∃x∀yFxy・・・・・・仮定
2(2) ∀yFuy ・・・・・・・[仮定]
2(3) Fuv・・・・・・・・・・(2)$\forall_{-}$
2(4) ∃xFxv ・・・・・・・・(3)$\exists_{+}$
2(5) ∃x∀yFxy・・・・・・(4)$\forall_{+}$
1(6) ∃x∀yFxy・・・・・・(1)(2)(5)$\exists_{-}$

(2)の u は，(1)に対する任意の個体を表わす．
(3)では u 以外の文字 v を選ぶ．さもないと(5)で$\forall_{+}$を適用するとき(2)の u が変項条件に違反してしまうからである．

例４（問題）　すべての犬は生物である．
　　　　　　∴すべての犬の足は生物の足である．

F：～は犬である．
G：～は生物である．
H：～は～の足である．

∀x(Fx⊃Gx) → ∀x(∃y(Fy∧Hxy)⊃∃y(Gy∧Hxy))

1(1) ∀x(Fx⊃Gx) ・・・・・・・・・・・・・・・・・仮定
2(2) ∃y(Fy∧Hxy)・・・・・・・・・・・・・・・・・[仮定]
3(3) Fv∧Huv・・・・・・・・・・・・・・・・・・・[仮定]
3(4) Fv・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(3)$\wedge_{-}$
3(5) Huv ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(3)$\wedge_{-}$
1(6) Fv⊃Gv ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(1)$\forall_{-}$
1,3(7) Gv ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・(4)(6)$\supset_{-}$
1,3(8) Gv∧Huv ・・・・・・・・・・・・・・・・・・(5)(7)$\wedge_{+}$
1,3(9) ∃y(Gy∧Huy) ・・・・・・・・・・・・・・・・(8)$\exists_{+}$
1,3(10) ∃y(Gy∧Huy) ・・・・・・・・・・・・・・・(2)(3)(9)$\exists_{-}$
1(11) ∃y(Fy∧Huy)⊃∃y(Gy∧Huy)・・・・・・・(2)(10)$\supset_{+}$
1(12) ∀x(∃y(Fy∧Hxy)⊃∃y(Gy∧Hxy)) ・・・・(11)$\forall_{+}$