論理学入門

論理学の対象：
論証 demonstration や推論 syllogism

論証（や推論）の暫定的定義：
いくつかの前提（命題）から，一つの結論（命題)が導かれる（論理的）操作（また，それを書き表わしたもの）．三段論法といわれる推論では，前提（命題）は２つ，結論（命題）は１つであるが，前提（命題）が３つ以上ある推論や，前提（命題）が一つしかない推論もあり得る．しかし，いずれの場合も，結論（命題）は一つである．

論理学で扱う命題propositionと日常言語の文との違い：
日常言語の文には，平叙文，疑問文，命令文，感嘆文などがあるが，論理学で扱う命題は，平叙文のみである．命題（平叙文）は，その命題が表現している事象（事態，状況，ことがら）と一致していれば，真(true)といい，一致していなければ，偽(false)という．この意味で真偽を確定できるものだけが，命題である（ただし，確定の手段については，問題があるので以上は，暫定的定義としておく）．

論証（や推論）の妥当性と正しさ：
論理学では，論証（や推論）の妥当性validity(validであること)を以下のように定める．
「いくつかの前提（命題）から，結論が導かれる」論証（や推論）を妥当である，という．
これに対して，論証（や推論）が「正しい」というときには，論証（や推論）が妥当であるだけでなくて，前提がすべて真であり，従って，結論も真である，というのが，日常言語的な意味であると思われる．
論証（や推論）の妥当性は，前提（命題）や結論（命題）それ自体の真偽とは関係なく論じられる．
次の例は，推論かどうか，それは妥当かどうか（妥当性をもつかどうか）．
例1）クリントンはアメリカの大統領である．（前提命題）
　　クリントンは中国で生まれた．（前提命題）
　　それゆえ，中国生まれのアメリカの大統領がいる．（結論命題）
例2）クリントンはアメリカの大統領である．
　　あるアメリカの大統領は鬚をはやしている．
　　従って，クリントンは鬚をはやしていない．
例3）日本の首都は東京である．
　　広島県の県庁所在地は広島である．
　　ゆえに，北海道で一番大きな都市は札幌である．
例4）ある学生は論理学を履修する．
　　論理学を受講する者は誰も法学を履修できない．
　　ゆえに，学生の中に法学を履修できない者がいる．

命題論理と述語論理

命題論理では，推論の構成要素として，命題propositionを最小単位として扱う．命題には，それ以上分解できないタイプの命題があり，それは要素命題と呼ばれる．複数の命題に分解できる命題を複合命題と呼ぶ．
要素命題を単位として記号化し，それらの命題どうしの関係を表現する記号（論理結合子といい，命題論理では５つを用いることが多い）を用いて，推論を表現することができる．

例1)「今日は晴れている」
例2)「今日は晴れていて，暖かい」

例1)は，要素命題であり，p と記号化できる．
例2)は，「今日は晴れている，かつ，今日は暖かい」と分解できるので，pかつqと表現できる．

論理結合子としては，５種類のものを用いることが多い（実は，表現法によって，同じ論理的な命題を５種類の記号を用いても，１種類の記号を用いても，またもっと多くの記号を用いても表現可能である）．

今，命題「今日は晴れている」を p ，命題「今日は暖かい」を q と表すことにする．

[1]否定　$\sim$
　$\sim p$　：pでない
[2]連言　$\wedge$
　$p \wedge q$　：pかつq
[3]選言　$\vee$
　$p \vee q$　：pまたはq
[4]条件法(if)　$\supset$
　$p \supset q$　：pならばq
[5]双条件(if and only if)　$\equiv$
　$p \equiv q$　：pのときそしてそのときだけq

以上の記号を用いて，命題論理によって，かなりの推論の妥当性を確かめることができるが，命題論理では，推論の妥当性を扱い得ないものもある．そこで，命題の構成要素を分析して表現する述語論理 Predicate logic が導入された．

1. 命題論理から述語論理へ

推論(1)
　義昭は哲学者なら，腹が出ている．　　$p \supset q$
　義昭は哲学者である．　　p
∴義昭は腹が出ている．　　$\therefore q$

注）$\supset$　は，論理結合子といい，「・・$\supset$・・」と書いて，「・・ならば・・」と読む．

推論(2)
　すべての哲学者は腹が出ている．　　p
　義昭は哲学者である．　　q
∴義昭は腹が出ている．　　$\therefore r$

推論(3)
　義昭は腹が出ている．　　p
∴腹が出ている者が少なくとも一人いる．　　$\therefore q$

命題論理では，論理分析の最小単位が真偽を問題にできる要素命題に制限されていたので，上

記の推論(1)の妥当性を示すことはできるが，推論(2)(3)の妥当性に関しては，これを示すことができない．推論(2)(3)を扱うためには，要素命題の内部構造を分析する方法をとらなければならない（述語論理）．

2. 単称命題

個体定項：「義昭」のように特定の個体 individual を表わす．a, b, c など．
述語記号：「腹が出ている」のように個体の性質を表わす．F, G, H など．

「義昭」をa，「日本」をbで表わし，「・・・は腹が出ている」をF，「・・・は島国である」をGで表わすことにすると，以下のようになる（単称命題）．

(1)「義昭は腹が出ている」→ Fa
(2)「日本は島国である」→ Gb

単称命題は，真偽を確定し得る．

3. 命題関数 Propositional function

個体変項：不特定の個体を表わす．x, y, z など．

個体変項をx，yとし，「・・・は腹が出ている」をF，「・・・は島国である」をGで表わすことにすると，以下のようになる（命題関数）．

(1)「xは腹が出ている」→Fx
(2)「yは島国である」→ Gy

命題関数は，真偽を確定し得ないが，個体変項xを個体定項aに置き換えれば，Fa（単称命題）となり，真偽を確定し得る．

4. 量化記号 Quantifier

4-1. 全称記号 Universal quantifier と存在記号 Existential quantifier

全称記号　∀　「すべて」
存在記号　∃　「少なくともひとつ」

全称量化子　∀x　「すべてのxについて」
存在量化子　∃x　「少なくともひとつのxについて」

全称命題　∀xFx　「すべてのxについて，xはFである」・・・・・・・(1)
存在命題　∃xFx　「少なくともひとつのxについて，xはFである」・・(2)

(1)は，「すべてのxはFである」とも読まれる．
(2)は，「或るxはFである」あるいは「Fであるxが少なくともひとつ存在する」とも読まれる．
また，(2)は特称命題とも呼ばれる．

以上の事柄は，述語論理を扱う際に，あらためて取り上げるが，はじめに問題にした推論(2)と(3)は，以下のように表現できる．

推論(2)
「～は哲学者である」をF
「～は腹が出ている」をG
「義昭」をaとすると，
　∀x(Fx⊃Gx)
　Fa
∴Ga

推論(3)
　Ga
∃xGx

ここから先は，後に，述語論理を詳しくみる機会にゆずることとし，まず，命題論理の基礎から学ぶことにしよう．

命題論理

５つの論理結合子と命題の真偽

論理結合子としては，以下の5つを用いる．p，qはそれぞれ命題を表わす．

1.　否定：～　～p「pではない」
2.　連言：∧　p∧q「pかつq」
3.　選言：∨　p∨q「pまたはq」
4.　条件法：⊃　p⊃q「pならばqである」
5.　双条件：≡　p≡q「pとqは等値」「pならばqであり，かつ，qならばpである」

p	q	～p	p∧q	p∨q	p⊃q	p≡q
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

次の命題を記号化しなさい．
1)「雨は降っても，風はふかない」
2)「私はバスかタクシーに乗る」
3)「風がふけば，桶屋がもうかる」
4)「太郎は食事をすませたら，コーヒーか紅茶を飲む」
5)「花子か太郎が来たときそしてそのときだけ私たちは野球ができる」

論理結合子に関する注意

2. 連言に関する注意　p∧q「pかつq」

1) 連言記号　∧　に対応する日常言語には，「そして」「かつ」「さらに」「また」「・・・であって・・・」「しかし」「だが」「・・・が・・・」などがある．

1-1)「そのチームは人気がある．しかし，弱い」
1-2)「そのチームは人気があり，そして弱い」

2)連言記号　∧　は，時間的前後関係を意味しない．

2-1)「花子は結婚して，子供を産む」
2-2)「花子は子供を産んで，結婚する」

3. 選言に関する注意　p∨q「pまたはq」

日本語の「あるいは」には，以下の２つの意味がある．

両立的選言：pとqのいずれかが真である．しかも，pとqがともに真であることが可能である．

排他的選言：pとqのいずれかが真である．しかし，pとqがともに真であることは不可能である．

選言　p∨q　は，両立的選言の意味で用いる．排他的選言を表現したいならば，∨ を両立的選言として，

(p∨q)∧～(p∧q)

と表現できる．

4. 条件法に関する注意　p⊃q「pならばqである」

⊃左側の命題(p)を前件，右側の命題(q)を後件と呼ぶ．

p⊃q　の読み方としては，以下のように読んでもよい．
「pはqのための十分条件である」
「qはpのための必要条件である」
「qのときだけpである」（「pであるのはqのときだけである」）
「pであってqでない，ということはない」　～(p∧～q)

条件法　⊃　に対応する日常言語には，「ならば」「すれば」「のとき」などがある．

しかし，以下の点で，日常言語とは異なる．

1)条件法　⊃　は，時間的前御関係を含まない．
2)条件法　⊃　は，まったく関係のない２つの命題を結合して，その真偽を問える．

2-1)　（薔薇は植物である）⊃（CDは円形である）
2-2)　（薔薇は植物である）⊃（CDは六角形である）
2-3)　（薔薇は鉱物である）⊃（CDは円形である）
2-4)　（薔薇は鉱物である）⊃（CDは六角形である）

論理結合子の結合力

〜，∧，∨，⊃，≡　の順に弱くなる，と取り決めておく．その上で，必要に応じて，（）を用いる．

真理表の行数

p	q	~p	~p∨q
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

p	q	r	p∨q	~r	(p∨q)∧~r
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0

真理関数

数学でいう関数では，変数xの値が決まると，y=f(x)のyの値も決まるが，それにならって，要素命題(pやq)の真理値(1か０，すなわち，真か偽)が決まると，複合命題(例えば，p∨〜q)全体の真理値が決まるので，これを真理関数ということがある．

［関数］$f(x, y)=x^2+xy-y^2$　　［真理関数］f(p, q)=p∨〜q
$f(1, 1)=1$　　f(1, 1)=1
$f(1, 2)=-1$　　f(1, 0)=1
$f(2, 1)=5$　　f(0, 1)=0
$f(2, 2)=4$　　f(0 , 0)=1

関数の式(x^2+xy-y^2 など)と数値についていえることは，命題論理の複合命題(p∨〜qなど)と真理値についていえる．

練習　次の複合命題の真理表を作りなさい．
1) 〜p∧q
2) (p∧q)⊃p
3) 〜p⊃(q∨p)
4) q≡(〜p∨r)

体系性

５つの論理結合子は，もっとも簡潔な仕方で，より多くの推論を説明するためのものであり，これによって，もっともシンプルな論理学体系ができあがる．要素命題が，pとqの２つだけの場合，pとqからなる複合命題がとる真理値の可能性は，以下のようになる．

pとqからなる複合命題の真理表は，４行になる．１行目の真偽の可能性は２通り，２行目も２通り，３行目も２通り，４行目も２通り．従って，計２×２×２×２＝16通り．

p	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0

これらに対応する実際の命題は，以下の通り．

1. p∨～p　2. p∨q　3. q⊃p　4. p⊃q　5. ～p∨～q　6. p　7. q
8. ～(p≡q)　9. p≡q　10. ～q　11. ～p　12. p∧q　13. ～(p⊃q)
14. ～(q⊃p)　15. ～(p∨q)　16. p∧～p

6. 7. は，要素命題そのまま．2. 4. 9. 11. 12. は，論理結合子の定義．
3. 10. は，論理結合子が１つ．1. 8. 13. 14. 15. 16. は，論理結合子が２つ．
5. のみが，論理結合子を３つ用いている．

論理結合子の節約

５つの論理結合子で複合命題を表現すれば，直観的にわかりやすいが，同じ複合命題を表現するために，必ずしも論理結合子が５つ必要なわけではない．ある論理結合子は別の論理結合子によって表現できるからである（論理結合子の節約）．

1) ≡の節約
p≡qは，すでに述べたように(p.4, l.170)，(p⊃q)∧(q⊃p)と同じである．
このことを，p≡qと(p⊃q)∧(q⊃p)の真理表を作って確かめなさい．

2) ∨と⊃の節約
∨　は，　～と∧によって表現することができる．
p∨qと～(～p∧～q)の真理表を作ってこのことを確かめなさい．
以上から，論理結合子は，～，∧，⊃の３つあればよいことになる．

さらに，⊃　は，～と∧によって表現することができる．
p⊃qと～(p∧～q)の真理表を作ってこのことを確かめなさい．

これで，論理結合子は，～，∧の２つあればよいことになる．

練習

1) p⊃qと～p∨qの真理表を作り，⊃は～と∨で表現できることを示せ．
2) p∧qと～(～p∨～q)の真理表を作り，∧は～と∨で表現できることを示せ．
3) p∧qと～(p⊃～q)の真理表を作り，∧は～と⊃で表現できることを示せ．
4) p∨qと～p⊃qの真理表を作り，∨は～と⊃で表現できることを示せ．

シェファー(H.Sheffer, 1913)の記号

表現が煩瑣となることをいとわず，論理結合子の節約を極限にまで押し進めたのが，シェファーの記号である．シェファーの記号には，２種類あり，｜がそのひとつである．｜は，pとqがともに1であるときのみ，p｜q は0と定義される．これを用いて，～，∧，∨，⊃，≡の５つの論理結合子を表現することができる．

[定義]

p	q	p｜q
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

[否定]

p	～p	p｜p
1	0	0
0	1	1

[条件法]

p	q	p⊃q	p｜(q｜q)
1	1	1	1　0
1	0	0	0　1
0	1	1	1　0
0	0	1	1　1

[連言]

p	q	p∧q	(p｜q)｜(p｜q)
1	1	1	0　1　0
1	0	0	1　0　1
0	1	0	1　0　1
0	0	0	1　0　1

[選言]

p	q	p∨q	(p｜p)｜(q｜q)
1	1	1	0　1　0
1	0	1	0　1　1
0	1	1	1　1　0
0	0	0	1　0　1

[双条件]

p≡q
→ (p⊃q)∧(q⊃p)
→ ((p⊃q)｜(q⊃p))｜((p⊃q)｜(q⊃p))
→ ((p｜(q｜q))｜(q｜(p｜p)))｜((p｜(q｜q))｜(q｜(p｜p)))

シェファーの記号には，もうひとつ，↓　があり，pとqがともに0であるときのみ，p↓q は1と定義される．

練習　次の複合命題を　｜　で表現しなさい．

1) p∧～q
2) ～p∨q
3) p⊃(q∨r)

複合命題の恒真・恒偽の判定(1)［真理表の方法］

複合命題は，とりうる真理値によって３つのタイプに分けられる．恒真命題・恒偽命題・偶然的命題の３種類である．

1)恒真命題：要素命題の真理値にかかわらず，常に真である命題．
2)恒偽命題：要素命題の真理値にかかわらず，常に偽である命題．
3)偶然的命題：：要素命題の真理値によって，真になったり偽になったりする命題．

複合命題のうちで，恒真命題と恒偽命題は，特別なタイプの命題であり，論理学的に重要な意味があるが，数において最も多いのは，偶然的命題であると考えられる．

1)恒真命題

例）$(p \supset q) \equiv (\sim p \vee q)$

p	q	$p \supset q$	$\sim p \vee q$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

$p \supset q$と$\sim p \vee q$は互いに言い換えることができる．

2)恒偽命題

例) $p \wedge \sim p$　（矛盾命題）

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
1	0	0
0	1	0

3)偶然的命題

例) $\sim p \wedge q$　　真理表を作って，偶然的であることを示せ．

練習　次の各組のA，Bについて，A≡Bが恒真であるか否かを示しなさい．
1) A: 学者は暗くて話し上手ではない，ということはない．
　B: 学者は暗くなく話し上手だ．
2) A: 監督がよくてチームがよければ，チームは強い．
　B: 監督がよければ，チームがよいとチームは強い．

思考の法則

伝統的に思考の法則と呼ばれてきたものとして，同一律，矛盾律，排中律がある．

同一律：ＡはＡである．
矛盾律：ＡがＢであってＢでない，ということはない．
排中律：ＡがＢでもなくＢでないものでもない，ということはない．

これを命題論理学では，次のように表現する．

同一律：(あるものはAである)⊃(あるものはAである)
　　　　(あるものはAである)≡(あるものはAである)
矛盾律：〜((AはBである)∧〜(AはBである))
排中律：(AはBである)∨〜(AはBである)

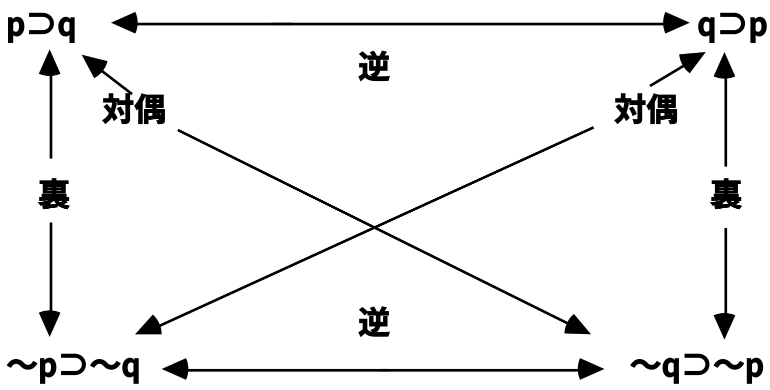
記号化すれば，以下の通り．これらはいずれも，恒真命題である．

同一律：$p \supset p$　あるいは　$p \equiv p$
矛盾律：$\sim(p \wedge \sim p)$
排中律：$p \vee \sim p$

練習　同一律，矛盾律，排中律について真理表を作りなさい．

逆・裏・対偶

$p \supset q$に対して，
$q \supset p$を逆，
$\sim p \supset \sim q$を裏，
$\sim q \supset \sim p$を対偶という．
対偶のみが恒真である．



練習　逆・裏・対偶について
　　　真理表をつくりなさい．

問題　次の文を読んで，どこが間違っているのか，考えなさい．

「しかられないと勉強しない」と言われることがあるが，対偶をとると，「勉強するとしかられる」となる．対偶どうしは，真理値が等しい恒真命題のはずだが・・・

ド・モルガンの法則

次の２つの恒真命題はド・モルガン(De Morgan)の法則と呼ばれる．

(a) $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$
(b) $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

練習　ド・モルガンの法則(a), (b)をそれぞれ，真理表を作って恒真であることを示しなさい．

二重否定律

～～p≡p

複合命題の恒真・恒偽の判定(2)［真理値分析の方法］

真理値の演算

1) 否定記号の演算　～1→0，～0→1

2) 連言記号の演算　1∧1→1；　1∧0→0，0∧1→0，0∧0→0

3) 選言記号の演算　1∨1→1，1∨0→1，0∨1→1；　0∨0→0

4) 条件法記号の演算　1⊃0→0；　1⊃1→1，0⊃1→1，0⊃0→1

5) 双条件記号の演算　1≡1→1，0≡0→1；　1≡0→0，0≡1→0

例題　pが0で，qが1のとき，以下の複合命題の真理値を求めよ．

(p⊃～q)∧～p
→(0⊃～1)∧～0
→(0⊃0)∧～0
→(0⊃0)∧1
→1∧1
→1

練習　pを1，qを0，rを1として，以下の複合命題の真理値を求めよ．
1) ～(～p∨～q∨～r)
2) (～p∧q)∨(p∧～r)
3) (p∧r)⊃(p⊃(q≡r))

真理値分析の方法

真理値分析の方法では，要素命題の真理が未定のものを含む場合を考える．

p	p∧1	1∧p	p∧0	0∧p	p∨1	1∨p	p∨0	0∨p
1	1	1	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	0	0

p	1⊃p	p⊃1	0⊃p	p⊃0	1≡p	p≡1	0≡p	p≡0
1	1	1	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0	1	1

５種類の論理結合子についてまとめると，以下のようになる．

1) 否定命題　～1→0，～0→1

2) 連言命題　p∧0→0，0∧p→0；　p∧1→p，1∧p→p

3) 選言命題　p∨1→1，1∨p→1；　p∨0→p，0∨p→p

4) 条件命題　1⊃p→p；　p⊃1→1，0⊃p→1；　p⊃0→～p

5) 双条件命題　1≡p→p，p≡1→p；　0≡p→～p，p≡0→～p

→の左右を比べると，左から右へと縮小されていることに注意せよ．この性質を利用して，与えられた命題の真理値を分析しようとするのが，真理値分析の方法である．

例１　(p∨～q)∧～p

pが1のとき
(1) (1∨～q)∧～1
(2) 1∧～1
(3) 1∧0
(4) 0

pが0のとき
(1) (0∨～q)∧～0
(2) ～q∧～0
(3) ～q∧1
(4) ～q

qが1のとき
(1) ～1
(2) 0

qが0のとき
(1) ～0
(2) 1

∴偶然的

例２　(p≡q)≡((p⊃q)∧(q⊃p))

pが1のとき
(1) (1≡q)≡((1⊃q)∧(q⊃1))
(2) q≡((1⊃q)∧(q⊃1))
(3) q≡(q∧(q⊃1))
(4) q≡(q∧1)
(5) q≡q

qが1のとき
(1) 1≡1
(2) 1

qが0のとき
(1) 0≡0
(2) 1

pが0のとき
(1) (0≡q)≡((0⊃q)∧(q⊃0))
(2) ～q≡((0⊃q)∧(q⊃0))
(3) ～q≡(1∧(q⊃0))
(4) ～q≡(1∧～q)
(5) ～q≡～q

qが1のとき
(1) ～1≡～1
(2) 0≡0
(3) 1

qが0のとき
(1) ～0≡～0
(2) 1≡1
(3) 1

∴恒真

練習　真理値分析の方法によって，以下の複合命題が恒真か恒偽か偶然的かを判定せよ．
1) (p∧q)∨～p
2) p≡(p⊃p)
3) ～(～p∧～q)
4) ～(p⊃q)≡(～p∨q)
5) (p⊃q)≡(～q⊃～p)
6) ～(～p∨～q∨～r)
7) (p∨～q)∧(～p∨r)

複合命題の恒真・恒偽の判定(3)［真理値割り当ての方法］

背理法（帰謬法，demonstratio ad absurdum）

pという命題を論証したいとき，pの否定を仮定し，そこから矛盾を導く．矛盾が導かれたのは，pの否定を仮定したからであり，矛盾が導かれないためには，pの否定を成り立たせないようにすること，すなわち，pが成り立つということである．

真理値割り当ての方法

与えられた命題が恒真であるか否かを判定したいとき，与えられた命題を偽(0)と仮定する．
与えられた命題が恒偽であるか否かを判定したいとき，与えられた命題を真(1)と仮定する．

例１［恒真の判定］(p∧q)⊃p

(p∧q)⊃p
0　　　←まず，(p∧q)⊃pを0と仮定する．
(1) p∧q　　(1) p
1　　<u>0</u>　　←(p∧q)⊃pが0となるように，p∧qに1，pに0を割り当てる．
(2) p　(2) q
×1　　1　　←p∧qが1となるように，pに1，qに1を割り当てる．
∴恒真である．

［矛盾チェック］

手続き(1) 任意の要素命題の真理値に下線を引き，それを<u>基準命題</u>とする．
手続き(2) <u>基準命題</u>と矛盾する要素命題の左に×を記す．
手続き(3) <u>基準命題</u>と同一の命題記号であって，しかも<u>基準命題</u>と矛盾しない要素命題の左に◯を記す．

例１の矛盾チェック

手続き(1)・・・(1) p の真理値 0 に下線を引く（これを<u>基準命題</u>とする）．
手続き(2)・・・(1) p の真理値 0 に矛盾する(2) p の真理値 1 の左に×を記す．

例１の真理値の割り当て方は一通りしかなく，その割り当て方では矛盾している．すなわち，例１では，矛盾しない割り当て方が一通りもない．それゆえ，(p∧q)⊃pは恒真である．

例２［恒偽の判定］～(p∨q)∧～p

～(p∨q)∧～p
1
(1) ～(p∨q)　　(1)～p
1　　1
(2) p∨q　　(4) p
0　　◯ 0
(3) p　(3) q
<u>0</u>　　0

∴恒偽でない（∵pが0，qが0のとき，真となる）

練習　次の命題が恒真か否かを真理値割り当ての方法によって判定せよ．恒真でない命題については，その命題を偽とする要素命題の真理値を明記せよ．

1) (∼p∧q)⊃p
2) (p∧∼q)⊃p

練習　次の命題が恒偽か否かを真理値割り当ての方法によって判定せよ．恒偽でない命題については，その命題を真とする要素命題の真理値を明記せよ．

1) (p∧q)∧∼p
2) p∧∼(∼p∨q)

例１と例２は，真理値の割り当て方が一通りであったが，そのようなケースは特別であるから，割り当て方が二通り以上あるケースを考えることにする．

例３ ［恒真の判定］((p∨q)∧∼p)⊃q

((p∨q)∧∼p)⊃q
0
(1) (p∨q)∧∼p　　(1) q
1　　0
(2) p∨q　　(2) ∼p
1　　1
(3) p　(3) q　(4) p
×1　×1　0
×1　○0
○0　×1　∴恒真である

例３は，全体として３通りの割り当て方があるが，そのすべての割り当て方が矛盾する．

例４ ［恒真の判定］(p∨q)⊃∼p

(p∨q)⊃∼p
0
(1) p∨q　　(1) ∼p
1　　0
(2) p　(2) q　(3) p
○1　1　1
○1　0
×0　1　∴恒真でない

例４は，全体として３通りの割り当て方があるが，矛盾が生じているのは一つの割り当て方だけである．つまり，矛盾しない割り当て方が，少なくとも一つあることになる．

練習　次の命題が恒真か否かを真理値割り当ての方法によって判定せよ．恒真でない命題については，その命題を偽とする要素命題の真理値を明記せよ．

1) ((p⊃q)∧p)⊃q
2) (p∨q)⊃(p∧q)

練習　次の命題が恒偽か否かを真理値割り当ての方法によって判定せよ．恒偽でない命題については，その命題を真とする要素命題の真理値を明記せよ．

1) ((p∨q)∧q)∧∼p
2) (p⊃q)∧((p∨q)∧(q∨r))

例５［恒真の判定］p≡(p∧q)

p≡(p∧q)
0

(1) p　(1) p∧q　(1) p　(1) p∧q
1　0　0　1
(2) p　(2) q　(2) p　(2) q
○1　0　×1　1
×0　1
×0　0　∴恒真でない

例５の割り当ては，４通りあり，そのうち，左側の(2)の１段目(pが1，qが0)の割り当てで矛盾が生じていない．ゆえに，p≡(p∧q)は恒真ではない．

一般に，矛盾しない割り当てが一つ見つかれば，そのあとは割り当てをする必要がない．従って，左側の(2)の１段目の割り当てで矛盾が生じないことがわかった時点で，恒真か否かを判定するという点に関しては，手続きを終了させてもよかったことになる．

方略(1) 割り当てが複数になる手順は後回しにする．
方略(2) すでに，真理値の確定している要素命題をもとにして，矛盾する割り当てをあらかじめ排除する．

方略(1)(2)に従って，例３を判定してみる．

例３’［恒真の判定］((p∨q)∧～p)⊃q

((p∨q)∧～p)⊃q
0
(1) (p∨q)∧～p　(1) q
1　0
(2) p∨q　(2) ～p
1　1
(4) p　(4) q　(3) p
0　×1　0
∴恒真である

方略(1)・・・(2) p∨q を1とする割り当てよりも，(2)～pを1とする割り当てを先行させる．
方略(2)・・・(3)の結果から，pが0でなくてはならないから，(4) pが1になれば必ず矛盾が生じる．そこで，(2)p∨qの割り当てにあたって，(3)の結果を用いて，(4)pの真理値を0にす((1)の結果を用いて，qの真理値を0にしてもよい)．こうして，矛盾する割り当てをあらかじめ排除すれば，より少ない割り当ての中から，矛盾しない割り当てをさがすことができる．

練習　方略(1)(2)に従って，次の命題が恒真か否かを判定せよ(既出の命題もある)．
1) (p⊃q)≡(～p∨q)
2) ((p⊃q)∧p)⊃q

複合命題の恒真・恒偽の判定(4)［標準化の方法］

命題を一定のかたちに変形することによって，複合命題の性質（恒真か恒偽か偶然的か）を判定する方法があり，標準化の方法と呼ばれる．

(1)連言標準形

(○∨○∨○∨…)∧(○∨○∨○∨…)∧・・・∧(○∨○∨○∨…)
連言肢　連言肢　連言肢

ある命題を連言標準形にすると，その命題がどういうときに偽になるかがわかる．
ある命題AやBを変形して，以下のようになったとする．

$A \equiv (\bigcirc \lor \bigcirc \lor \bigcirc \lor \cdots) \land (p \lor q \lor \sim r) \land \cdot\cdot\cdot \land (\bigcirc \lor \bigcirc \lor \bigcirc \lor \cdots)$

命題Aは，pが0，qが0，rが1のとき，0となることがわかる．

$B \equiv (\bigcirc \lor \bigcirc \lor \bigcirc \lor \cdots) \land (\bigcirc \lor \bigcirc \lor \underline{p \lor \sim p} \lor \cdots) \land \cdot\cdot\cdot \land (\bigcirc \lor \bigcirc \lor \bigcirc \lor \cdots)$

連言肢の中にp∨〜pがあらわれると，その連言肢の真理値は1になる．

(2)恒真性の判定

方針(1)　≡，⊃　を　〜，∧，∨　に置き換える．

$(p \equiv q) \equiv ((p \supset q) \land (q \supset p))$　[双条件の定義]

$(p \supset q) \equiv (\sim p \lor q)$　[条件法の定義]

方針(2) 〜が要素命題の直前につくようにする．

$\sim (p \land q) \equiv (\sim p \lor \sim q)$　[ド・モルガン]

$\sim (p \lor q) \equiv (\sim p \land \sim q)$　[ド・モルガン]

方針(3)二重否定を消去する．

$\sim\sim p \equiv p$　[二重否定]

方針(4)分配することによって，連言あるいは選言の標準形をつくる．

$(p \land (q \lor r)) \equiv ((p \land q) \lor (p \land r))$　[分配律]

$(p \lor (q \land r)) \equiv ((p \lor q) \land (p \lor r))$　[分配律]

方針(5)必要に応じて，以下の公式を用いる．

$(p \lor p) \equiv p$　[反復律]

$(p \land p) \equiv p$　[反復律]

$(p \land q) \equiv (q \land p)$　[交換律]

$(p \lor q) \equiv (q \lor p)$　[交換律]

$(p \land (q \land r)) \equiv ((p \land q) \land r)$　[結合律]

$(p \lor (q \lor r)) \equiv ((p \lor q) \lor r)$　[結合律]

その他，必要に応じて，別紙「基本的恒真式」を参照．

例１　$((p \lor q) \land \sim p) \supset q$

$\equiv \sim ((p \lor q) \land \sim p) \lor q$　[条件法の定義]

$\equiv (\sim (p \lor q) \lor \sim\sim p) \lor q$　[ド・モルガン]

$\equiv (\sim (p \lor q) \lor p) \lor q$　[二重否定律]

$\equiv ((\sim p \land \sim q) \lor p) \lor q$　[ド・モルガン]

$\equiv (\sim p \land \sim q) \lor (p \lor q)$　[結合律]

$\equiv (p \lor q) \lor (\sim p \land \sim q)$　[交換律]

$\equiv ((p \lor q) \lor \sim p) \land ((p \lor q) \lor \sim q)$　[分配律]

$\equiv (p \lor \sim p \lor q) \land (p \lor q \lor \sim q)$　[結合律２回]

p∨〜pとq∨〜qは恒真命題なので，それぞれ１と置く．

$\equiv (1 \lor q) \land (p \lor 1)$

$\equiv 1 \land 1$

$\equiv 1$　∴恒真である

例２　$((p\lor q)\land p)\supset\sim q$

$\equiv\sim((p\lor q)\land p)\lor\sim q$　[条件法の定義]

$\equiv(\sim(p\lor q)\lor\sim p)\lor\sim q$　[ド・モルガン]

$\equiv((\sim p\land\sim q)\lor\sim p)\lor\sim q$　[ド・モルガン]

$\equiv(\sim p\land\sim q)\lor(\sim p\lor\sim q)$　[結合律]

$\equiv(\sim p\lor\sim q)\lor(\sim p\land\sim q)$　[交換律]

$\equiv((\sim p\lor\sim q)\lor\sim p)\land((\sim p\lor\sim q)\lor\sim q)$　[分配律]

$\equiv(\sim p\lor\sim q\lor\sim p)\land(\sim p\lor\sim q\lor\sim q)$　[結合律２回]

$\equiv(\sim p\lor\sim p\lor\sim q)\land(\sim p\lor\sim q\lor\sim q)$　[交換律]

$\equiv(\sim p\lor\sim q)\land(\sim p\lor\sim q)$　[反復律２回]

$\equiv\sim p\lor\sim q$　[反復律]

∴恒真でない(pが1，qが1のとき0になる)

例３　$((\sim p\land q)\lor p)\lor r$

$\equiv(p\lor(\sim p\land q))\lor r$　[交換律]

$\equiv((p\lor\sim p)\land(p\lor q))\lor r$　[分配律]

ここで，$(p\lor\sim p)\land$　を削除する．$p\lor\sim p$の真理値はつねに1であり，$1\land(p\lor q)$の真理値は$p\lor q$の真理値と同じである．

$\equiv(p\lor q)\lor r$

$\equiv p\lor q\lor r$　[結合律]

∴恒真でない(pが0，qが0，rが0のとき0になる)

(3)選言標準形

(○∧○∧○∧…)∨(○∧○∧○∧…)∨・・・∨(○∧○∧○∧…)

選言肢　選言肢　選言肢

ある命題を選言標準形にすると，その命題がどういうときに真になるかがわかる．
ある命題AやBを変形して，以下のようになったとする．

$A\equiv(p\land\sim q\land r)\lor(p\land q\land\sim r)\lor(\sim p\land q)$

選言命題が真となるには，少なくとも１つの選言肢が真であればよいから，pが1，qが0，rが1のとき，pが1，qが1，rが0のとき，pが0，qが1のとき(このときrは1でも0でもよい)，いずれかのとき，命題Aは1になる．

B≡(○∧○∧○∧…)∨(○∧$\underline{p\land\sim p}$∧○∧…)∨・・・∨(○∧○∧○∧…)

選言肢の中に，恒偽命題$p\land\sim p$があらわれると，その選言肢の真理値は0になる．

(4)恒偽性の判定

例１　$\sim(((p\lor q)\land p)\supset\sim q)$

$\equiv\sim(\sim((p\lor q)\land p)\lor\sim q)$　[条件法の定義]

$\equiv\sim\sim((p\lor q)\land p)\land\sim\sim q$　[ド・モルガン]

$\equiv((p\lor q)\land p)\land q$　[二重否定２回]

$\equiv(p\lor q)\land(p\land q)$　[結合律]

$\equiv(p\land q)\land(p\lor q)$ [交換律]
$\equiv((p\land q)\land p)\lor((p\land q)\land q)$ [分配律]
$\equiv(p\land q\land p)\lor(p\land q\land q)$ [結合律２回]
$\equiv(p\land p\land q)\lor(p\land q\land q)$ [交換律]
$\equiv(p\land q)\lor(p\land q)$ [反復律２回]
$\equiv p\land q$ [反復律]
∴恒偽でない(pが1，qが1にとき，1になる)

例２　$\sim(((p\supset q)\land p)\supset q)$
$\equiv\sim(\sim((p\supset q)\land p)\lor q)$ [条件法の定義]
$\equiv\sim(\sim((\sim p\lor q)\land p)\lor q)$ [条件法の定義]
$\equiv\sim(\sim(p\land(\sim p\lor q))\lor q)$ [交換律]
$\equiv\sim(\sim((p\land\sim p)\lor(p\land q))\lor q)$ [分配律]
ここで，$(p\land\sim p)\lor$　を削除する．$p\land\sim p$　はつねに0であり，$0\lor(p\land q)$の真理値は，$p\land q$の真理値と同じである．
$\equiv\sim(\sim(p\land q)\lor q)$
$\equiv\sim\sim(p\land q)\land\sim q$ [ド・モルガン]
$\equiv(p\land q)\land\sim q$ [二重否定律]
$\equiv p\land q\land\sim q$ [結合律]
恒偽命題$q\land\sim q$のかわりに0とおく．
$\equiv p\land 0$
$\equiv 0$　∴恒偽である

(5)完全連言標準形と完全選言標準形

完全連言標準形：各連言肢がもとの命題に含まれるすべての要素命題を含む連言標準形．
完全選言標準形：各選言肢がもとの命題に含まれるすべての要素命題を含む選言標準形．

例　完全でない連言標準形を完全連言標準形に変形する
$(p\lor q)\land(\sim p\lor q\lor\sim r)$
$\equiv((p\lor q)\lor(r\land\sim r))\land(\sim p\lor q\lor\sim r)$　$\lor(r\land\sim r)$を加えても真理値は変わらない
$\equiv((p\lor q\lor r)\land(p\lor q\lor\sim r))\land(\sim p\lor q\lor\sim r)$ [分配律]
$\equiv(p\lor q\lor r)\land(p\lor q\lor\sim r)\land(\sim p\lor q\lor\sim r)$ [結合律]

完全連言標準形にすると，要素命題がどういう真理値をとるときに，もとの命題が偽になるかが一目瞭然である（pが0，qが0，rが0のときと，pが0，qが0，rが1のときと，pが1，qが0，rが1のとき）．

練習　完全連言標準形にしなさい．

$(p\supset r)\land(q\supset r)$

練習　完全選言標準形にしなさい．

$(p\lor q)\land\sim(p\supset r)$

推論 inference，syllogism

1. 推論の妥当性validityの判定(1) 真理表

例１　義昭は物理学者ならば，学者だ．
　　　義昭は学者ではない．
　　∴義昭は物理学者ではない．　　（条件三段論法）

「義昭は物理学者である」をp
「義昭は学者である」をq　とする．

　$p \supset q$　　　$\sim q$　　　$\therefore \sim p$

p	q	p⊃q	~q	~p
1	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

推論が妥当であるかどうかを判定するためには，前提すべてが1のときに，必らず結論も1であるかどうかをみる．

←４行目

手順(1) ２つの前提が両方とも1であるのは，４行目だけ(p⊃q が1，～q が1）である．
手順(2) そのときの結論の真理値は1である．

∴　例１の推論は妥当valid である．

推論が妥当であるというのは，前提すべてが1であれば，必らず結論も1である，ということである．前提すべてが1であるのに，結論が1にならない場合がひとつでもあるならば，その推論は妥当ではない．

例２　義昭は日本人ならば，東洋人である．
　　　義昭は東洋人である．
　　∴義昭は日本人である．

「義昭は日本人である」をp，
「義昭は東洋人である」をq　とする．

　$p \supset q$　　　q　　　$\therefore p$

p	q	p⊃q	q	p
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	0	0

手順(1) 前提すべての真理値が1になっているのは，１行目と３行目である．
手順(2) そのときの結論の真理値は，１行目は1であるが，３行目は0である．
前提すべてが1のとき，結論は必らずしも1になっていない．
∴例２の推論は妥当ではない．

注意）前提すべてが1であるときには，必らず結論は1になる，という関係がなりたっていれば，たとえ，前提も結論も0になる場合があったとしても，その推論は妥当である．つまり，前提や結論それぞれが単独に真であるか偽であるかということと，推論としての妥当性とは関係がない．

練習　真理表を使って次の推論の妥当性を判定しなさい．（例１，２にならって，命題を記号化して，推論を記号で表現すること．妥当でない推論については，そのときの要素命題の真理値を明記すること）

1) 義昭か卓爾が犯人だ．
　義昭は犯人でない．
∴卓爾が犯人だ．　　　（選言三段論法）

2) クリントンはエチオピア人ならば，東洋人だ．
　クリントンはエチオピア人だ．
∴ クリントンは東洋人だ．　　　（前件肯定式 modus ponens）

3) 阪神パークは兵庫県にある．
　阪神パークは遊園地である．
∴ 阪神パークは兵庫県にある遊園地である．

4) 太郎は体調が悪くなければ，この球が打てる．
　太郎はこの球が打てない．
∴ 太郎は体調が悪い．　　　（後件否定式 modus tollens）

例３　悟は勉強すれば，単位をとることができる．
　　　悟は単位をとることができれば，卒業できる．
　　∴悟は勉強すれば，卒業できる．

「悟は勉強する」をp，「悟は単位をとることができる」をq，「悟は卒業できる」をr，とする．

　p⊃q，　q⊃r　　∴p⊃r　（条件三段論法）

p	q	r	p⊃q	q⊃r	p⊃r
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

手順(1) 前提の真理値が両方とも1になっているのは，１，５，７，８行目である．
手順(2) そのときの結論の真理値は，４行とも1である．

前提すべてが1のとき，結論も必らず1なので，この推論は妥当である．

練習　真理表を使って次の推論の妥当性を判定しなさい．（命題を記号化して，推論を記号で表現すること．妥当でない推論については，そのときの要素命題の真理値を明記すること）

1) 都市が緑化されれば，野鳥が多くなる．
　都市が緑化されなければ，CO_2濃度が高くなる．
∴ CO_2濃度が高くならなければ，野鳥が多くなる．

2) 幹子は論理学者ならば，成人である．
　幹子は成人ならば，酒が飲める．
　幹子は酒がのめないならば，論理学者ではない．

　推論の２つの前提をA，Bとし，結論がCであるとき，(A∧B)⊃Cが恒真であれば，その推論は妥当である．

　一般に，前提を　∧　で結合した命題を前件とし，結論を後件とする条件命題が恒真であるとき，そしてそのときだけ，その推論は妥当である．

A	B	C	(A∧B)⊃C
1	1	1	1　1
1	1	0	1　0
1	0	1	0　1
1	0	0	0　1
0	1	1	0　1
0	1	0	0　1
0	0	1	0　1
0	0	0	0　1

例１' (p.19)
p⊃q，～q　∴～p

p	q	((p⊃q)∧～q)⊃～p
1	1	1　0　0　1　0
1	0	0　0　1　1　0
0	1	1　0　0　1　1
0	0	1　1　1　1　1

∴妥当である

練習　p.20の練習およびp.21の練習を上記の方法で，その推論が妥当か否かを判定しなさい．

2. 推論の妥当性の判定(2) 真理値割り当ての方法

すべての前提に1，結論に0を割り当てる．
↓
恒真・恒偽の判定の場合と同じ
↓
すべての要素命題の真理値が決まる
↓　　　　　　　　↓
(a)矛盾しない割り当てが一つもない　　(b)矛盾しない割り当てが少なくとも一つある
↓　　　　　　　　↓
推論は妥当である　　推論は妥当でない

(a)矛盾しない割り当てが一つもなければ，前提すべてを1，結論を0とするように，各要素命題に真理値を割り当てることができない．すなわち，前提すべてが1で，結論が0となることはない．それ故，推論は妥当である．

(b)矛盾しない割り当てが一つあれば，少なくとも一つの仕方で，前提すべてを1，結論を0とするように，各要素命題に真理値を割り当てることができなる．すなわち，前提すべてが1で，結論が0となることがある．それ故，推論は妥当でない．

例１　p⊃q　　　　　　～q　　　　　　　∴～p
　　　1　　　　　　　1　　　　　　　　0
(3) p　(3) q　　　(1) q　　　　　　(2) p
×0　　0　　　　　0　　　　　　　1　　　∴妥当である

例２　p⊃q　　　　　　q⊃r　　　　　　∴p⊃r
　　　1　　　　　　　1　　　　　　　0
(2) p　(2) q　　(3) q　(3) r　　(1) p　(1) r
1　　1　　　　1　×1　　　1　　0　　∴妥当である

例３　義昭は大学教員であれば，質問を無視しない．
　　　義昭は大学教員であれば，短気である．
　　∴義昭は質問を無視すれば，短気である．

「義昭は大学教員である」をp
「義昭は質問を無視する」をq
「義昭は短気である」をr　とする．

p⊃～q　　　　　　p⊃r　　　　　　∴q⊃r
　1　　　　　　　1　　　　　　　0
(3) p　(3) ～q　　(2) p　(2) r　　(1) q　(1) r
0　　1　　　　　0　　0　　　　1　　0
0　　0
　(4) q
　×0
　　1　　　　　　　　　　　　　　　　∴妥当でない

練習　以下の推論が妥当であるかどうかを，真理値割り当ての方法によって判定しなさい．妥当でない推論については，前提すべてを真，結論を偽とする要素命題の真理値を明記すること．

1) 敬子は新聞記者ならば，正義の味方である．
　敬子はジャーナリストならば，正義の味方である．
∴ 敬子は新聞記者ならば，ジャーナリストである．

2) ゲオルクはドイツ人であるかマジャール人である．
　ゲオルクはドイツ人であれば，ドイツ語が話せる．
　ゲオルクはドイツ語が話せない．
∴ ゲオルクはマジャール人である．

3. ディレンマ(dilemma，両刀論法)

例４ 私はギョーザを食べれば，口臭がする．
私は焼肉を食べれば，口臭がする．
私はギョーザか焼肉を食べる．
∴ 私は口臭がする．　　（単純構成的ディレンマ）

「私はギョーザを食べる」をp，「私は口臭がする」をq，「私は焼肉を食べる」をrとする．

$p \supset q$		$r \supset q$		$p \vee r$		∴ q
1		1		1		0
(1) p	(1) q	(2) r	(2) q	(3) p	(3) r	
0	0	$\underline{0}$	0	0	×1	

∴妥当である

前提に含まれる二つの条件命題の後件が同じである場合，「単純」と称する．
前提に含まれる二つの条件命題の後件が異なる場合，「複合」と称する．
前提に含まれる選言命題が肯定の要素命題からなる場合，「構成的」と称する．
前提に含まれる選言命題が否定の要素命題からなる場合，「破壊的」と称する．

練習　真理値割り当ての方法によって，以下のディレンマが妥当であることを示しなさい（例４に従って，命題を記号化し，推論を表現すること）．

1) 私はワインを飲めば，二日酔いになる．
私はビールを飲めば，腹をこわす．
私はワインかビールを飲む．
∴ 私は二日酔いになるか腹をこわす．　（複合構成的ディレンマ）

2) 物理学者は人間であれば，羽目をはずす．
物理学者は人間であれば，異性に関心をもつ．
物理学者は羽目をはずさないか，異性に関心をもたない．
∴ 物理学者は人間ではない．　（単純破壊的ディレンマ）

3) 聡子は恋人を大事にすれば，友人を失う．
聡子は友人を大事にすれば，恋人を失う．
聡子は友人を失わないか，恋人を失わない．
∴ 聡子は恋人を大事にしないか，友人を大事にしない．　（複合破壊的ディレンマ）

記号法の比較

系統	分派	命題変項	術語変項	真理関数	限量記号
ポーランド系		p　q	ϕxy	N K A C E	Πx　Σx
ラッセル系	ラッセル	p　q	ϕ(x, y)	∽ ・ ∨ ⊃ ≡	(x) (∃x)
	カルナップ	p　q	Fxy	∽ ・ ∨ ⊃ ≡	(x) (∃x)
ヒルベルト系	旧版	X　Y	F(x, y)	− & ∨ → ∽	(x) (Ex)
	新版	A　B	Fxy	¬ ∧ ∨ → ↔	∀x　∃x

２項真理関数

p　q	ϕ1	ϕ2 ϕ3 ϕ4 ϕ5	ϕ6	ϕ7 ϕ8	ϕ9 ϕ10	ϕ11	ϕ12 ϕ13 ϕ14 ϕ15	ϕ16
1　1	1	1　1　1　0	1	1　1	0　1	0	1　0　0　0	0
1　0	1	1　1　0　1	0	1　0	1　0	1	0　1　0　0	0
0　1	1	1　0　1　1	0	0　1	0　1	1	0　0　1　0	0
0　0	1	0　1　1　1	1	0　0	1　1	0	0　0　0　1	0
	t	∨　⊂　⊃　⊼	≡	p　q	~q　~p	≢	∧　⊋　⊊　⊽	f

注意１　上記のうち，よく使うのは，次の５つである．

ϕ_2：p∨q　選言（pまたはqである），　ϕ_4：p⊃q　条件（pならばqである），
ϕ_6：p≡q　相条件・等値（if and only if），　ϕ_{10}：∼p　否定（pでない），
ϕ_{12}：p∧q　連言（pかつqである）

注意２　ポーランド系記号法では，下記のようになるが，J，K，M，Xは殆ど用いられず，LとMも様相を表す記号として用いられる．

ϕ_2：Apq，ϕ_3：Bpq，ϕ_4：Cpq，ϕ_5：Dpq，ϕ_6：Epq，ϕ_{10}：Npq，ϕ_{11}：Jpq，
ϕ_{12}：Kpq，ϕ_{13}：Lpq，ϕ_{14}：Mpq，ϕ_{15}：Xpq

例1　CNpCpq　**は，**∼p⊃(p⊃q)

例2　ApNp **は，**p∨∼p

例3　EKpqKqp **は，**(p∧q)≡(q∧p)

練習　ポーランド系記号で表された次の1)～5)を，５つの論理結合子（∨，⊃，≡，∼，∧）を用いて表現せよ．

1) CCpqCCqrCpr
2) CCNppp
3) CKCpqCqrCpr
4) CKpNpq
5) CApqAqp

述語論理 Predicate logic の導入

1. 命題論理から述語論理へ

推論(1)
　義昭は哲学者なら，腹が出ている．　　$p \supset q$
　義昭は哲学者である．　　p
∴義昭は腹が出ている．　　$\therefore q$

推論(2)
　すべての哲学者は腹が出ている．　　p
　義昭は哲学者である．　　q
∴義昭は腹が出ている．　　$\therefore r$

推論(3)
　義昭は腹が出ている．　　p
∴腹が出ている者が少なくとも一人いる．　　$\therefore q$

命題論理では，論理分析の最小単位が真偽を問題にできる要素命題に制限されていたので，上記の推論(1)の妥当性を示すことはできるが，推論(2)(3)の妥当性に関しては，これを示すことができない．推論(2)(3)を扱うためには，要素命題の内部構造を分析する方法をとらなければならない（述語論理）．

2. 単称命題

個体定項：「義昭」のように特定の個体 individual を表わす．a, b, c など．
述語記号：「腹が出ている」のように個体の性質を表わす．F, G, H など．

「義昭」をa，「日本」をbで表わし，「・・・は腹が出ている」をF，「・・・は島国である」をGで表わすことにすると，以下のようになる（単称命題）．

(1)「義昭は腹が出ている」→ Fa
(2)「日本は島国である」→ Gb

単称命題は，真偽を確定し得る．

例　義昭か昭義が犯人だ．

「義昭」をa，「昭義」をb，「・・・が犯人だ」をFとすると，
「義昭か昭義が犯人だ」→ $Fa \lor Fb$

3. 命題関数 Propositional function

個体変項：不特定の個体を表わす．x, y, z など．

個体変項をx，yとし，「・・・は腹が出ている」をF，「・・・は島国である」をGで表わすことにすると，以下のようになる（命題関数）．

(1)「xは腹が出ている」→Fx
(2)「yは島国である」→ Gy

命題関数は，真偽を確定し得ないが，個体変項xを個体定項aに置き換えれば，Fa（単称命題）となり，真偽を確定し得る．

4. 量化記号 Quantifier

4-1. 全称記号 Universal quantifier と存在記号 Existential quantifier

全称記号　$\forall$　「すべて」
存在記号　$\exists$　「少なくともひとつ」

全称量化子　$\forall x$　「すべてのxについて」
存在量化子　$\exists x$　「少なくともひとつのxについて」

全称命題　$\forall xFx$　「すべてのxについて，xはFである」・・・・・・・・(1)
存在命題　$\exists xFx$　「少なくともひとつのxについて，xはFである」・・(2)

(1)は，「すべてのxはFである」とも読まれる．
(2)は，「或るxはFである」あるいは「Fであるxが少なくともひとつ存在する」とも読まれる．
また，(2)は特称命題とも呼ばれる．

4-2. 個体領域

「すべてのxについて」あるいは「少なくともひとつのxについて」というときの，xがどの範囲に含まれる個体であるかをあらかじめ明らかにしておく必要がある．個体の存在する範囲を「個体領域」と呼ぶ．

例　変項xの個体領域を「学生からなる集合」とする．この場合，「・・・は学生である」という述語は不要になる．「・・・はアラブ語（アラビア語）ができる」をFとする．

(1)「すべての学生はアラブ語ができる」　→　$\forall x$(xはアラブ語ができる)
→　$\forall xFx$
(2)「すべての学生はアラブ語ができない」　→　$\forall x\sim$(xはアラブ語ができる)
→　$\forall x\sim Fx$
(3)「ある学生はアラブ語ができる」　→　$\exists x$(xはアラブ語ができる)
→　$\exists xFx$
(4)「ある学生はアラブ語ができない」　→　$\exists x\sim$(xはアラブ語ができる)
→　$\exists x\sim Fx$

(5)「アラブ語のできる学生がいるかいないかだ」　→　$\exists xFx\vee\sim\exists xFx$
(6)「すべての学生はアラブ語ができるかできないかだ」　→　$\forall x(Fx\vee\sim Fx)$

(5)(6)は，個体領域をどのように設定しても常に真である（恒真）が．(1)〜(4)は，個体領域の設定の仕方によって真になったり偽になったりする（偶然的，事実的）．

4-3. 作用域

作用域：全称記号∀あるいは存在記号∃が，それに続く命題関数に作用する最小の範囲．

	量化子	作用域
(1) $\forall xFx$	$\forall x$	Fx
(2) $\exists xGx$	$\exists x$	Gx
(3) $\forall xFx \land \exists xGx$	$\forall x$	Fx
	$\exists x$	Gx
(4) $\forall x(Fx \land Gx)$	$\forall x$	$(Fx \land Gx)$

4-4. 自由変項 free variable と束縛変項 bound variable

自由変項：全称記号あるいは存在記号の作用域内にない変項．
束縛変項：全称記号あるいは存在記号の作用域内にある変項．

(1) $\forall xFx \land Gy$　・・・・・・・・・・・・xは束縛変項，yは自由変項．
(2) $\forall x(Fx \land Gx \land Hy)$　・・・・・・・・・xは束縛変項，yは自由変項．
(3) $\forall x(Fx \land Gx \land \exists yHy)$
(4) $\forall xFx \supset \exists y(Gx \land Hy)$
(5) $\exists x((Fx \lor \forall xGx) \land \forall y(Gy \supset Hx))$

5. 命題の分類

命題
　単称命題
　　(1)単称肯定命題　Fa
　　(2)単称否定命題　$\sim Fa$
　量化命題
　　(3)全称肯定命題　$\forall xFx$
　　(4)全称否定命題　$\forall x \sim Fx$
　　(5)存在肯定命題　$\exists xFx$　（特称肯定命題）
　　(6)存在否定命題　$\exists x \sim Fx$　（特称否定命題）

6. 量化命題の有限解釈（個体領域が有限の場合）

例　個体領域：研究室のメンバー(a, b, c, d)
　　F：「・・・はアルバイトをしている」

(1)「研究室のすべてのメンバーはアルバイトをしている」
→　$\forall xFx$
→　$Fa \land Fb \land Fc \land Fd$

(2)「研究室のあるメンバーはアルバイトをしている」
→　$\exists xFx$
→　$Fa \lor Fb \lor Fc \lor Fd$

練習　個体領域を(a, b)として，以下の式を展開しなさい．

(1) $\forall xFx \supset \forall xGx$

(2) $\exists xFx \wedge \exists xGx$

(3) $\exists x(Fx \wedge Gx)$

7. 量化命題と否定

個体領域を鳥の集合，述語Fを「・・・は赤い」とする．

全称命題

(1) $\forall xFx$　「すべての鳥は赤い」

(2) $\sim\forall xFx$　「すべての鳥が赤い，というわけではない」

(3) $\forall x\sim Fx$　「すべての鳥は赤くない」

(4) $\sim\forall x\sim Fx$　「鳥はすべて赤くない，というわけではない」

存在命題

(5) $\exists xFx$　「赤い鳥がいる」

(6) $\sim\exists xFx$　「赤い鳥はいない」

(7) $\exists x\sim Fx$　「赤くない鳥がいる」

(8) $\sim\exists x\sim Fx$　「赤くない鳥はいない」

量化子と否定の関係

(a) $\forall xFx \equiv \sim\exists x\sim Fx$

(b) $\exists xFx \equiv \sim\forall x\sim Fx$

(c) $\sim\forall xFx \equiv \exists x\sim Fx$

(d) $\sim\exists xFx \equiv \forall x\sim Fx$

(a) $\forall xFx \equiv \sim\exists x\sim Fx$　について，個体領域を(a, b, c)として，両辺を展開する．

左辺$\equiv \forall xFx \equiv Fa \wedge Fb \wedge Fc$

右辺$\equiv \sim\exists x\sim Fx \equiv \sim(\sim Fa \vee \sim Fb \vee \sim Fc)$

$\equiv Fa \wedge Fb \wedge Fc$　［ド・モルガン］

$\therefore \forall xFx \equiv \sim\exists x\sim Fx$

練習　上にならって，(b)～(d)についても，個体領域を(a, b, c)として，両辺を展開しなさい．

量化命題と連言

例）　F: ～は白い，　G: ～は丸い

(1) $\forall x(Fx \wedge Gx) \equiv \forall xFx \wedge \forall xGx$

（すべてのものが白くて丸い）≡（すべてのものが白くかつすべてのものが丸い）

個体領域を(a, b)とすると，

（左辺）$\equiv(Fa\wedge Ga)\wedge(Fb\wedge Gb)\equiv Fa\wedge Ga\wedge Fb\wedge Gb$

（右辺）$\equiv(Fa\wedge Fb)\wedge(Ga\wedge Gb)\equiv Fa\wedge Ga\wedge Fb\wedge Gb$

(2) $\exists x(Fx\wedge Gx)\supset(\exists xFx\wedge\exists xGx)$

（白くて丸いものがある）ならば（白いものがありかつ丸いものがある）

個体領域を(a, b)とすると，

（左辺）$\equiv(Fa\wedge Ga)\vee(Fb\wedge Gb)$

（右辺）$\equiv(Fa\vee Fb)\wedge(Ga\vee Gb)$
$\equiv((Fa\vee Fb)\wedge Ga)\vee((Fa\vee Fb)\wedge Gb)$　分配律10
$\equiv((Fa\wedge Ga)\vee(Fb\wedge Ga))\vee((Fa\wedge Gb)\vee(Fb\wedge Gb))$　分配律11
$\equiv(Fa\wedge Ga)\vee(Fb\wedge Ga)\vee(Fa\wedge Gb)\vee(Fb\wedge Gb)$　結合律7
$\equiv(Fa\wedge Ga)\vee(Fb\wedge Gb)\vee(Fb\wedge Ga)\vee(Fa\wedge Gb)$　交換律6

ここで，$(Fa\wedge Ga)\vee(Fb\wedge Gb)\equiv p$，$(Fb\wedge Ga)\vee(Fa\wedge Gb)\equiv q$ とおくと，

（左辺）$\equiv p$，　（右辺）$\equiv p\vee q$

従って，（左辺）⊃（右辺）は，$p\supset(p\vee q)$

p	q	p⊃(p∨q)
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	1

量化命題と選言

例）　F: ～は白い，　G: ～は黒い

(1) $\exists x(Fx\vee Gx)\equiv\exists xFx\vee\exists xGx$

（白か黒かであるものが存在する）≡（白いものが存在するか黒いものが存在する）

個体領域を(a, b)とすると，

（左辺）$\equiv(Fa\vee Ga)\vee(Fb\vee Gb)\equiv Fa\vee Ga\vee Fb\vee Gb\equiv Fa\vee Fb\vee Ga\vee Gb$

（右辺）$\equiv(Fa\vee Fb)\vee(Ga\vee Gb)\equiv Fa\vee Fb\vee Ga\vee Gb$

(2) $(\forall xFx\vee\forall xGx)\supset\forall x(Fx\vee Gx)$

（すべてのものが白いか，すべてのものが黒い）ならば
（すべてのものが白いか黒いかである）

個体領域を(a, b)とすると，

（左辺）$\equiv (Fa \wedge Fb) \vee (Ga \wedge Gb)$
$\equiv ((Fa \wedge Fb) \vee Ga) \wedge ((Fa \wedge Fb) \vee Gb)$　分配律
$\equiv ((Fa \vee Ga) \wedge (Fb \vee Ga)) \wedge ((Fa \vee Gb) \wedge (Fb \vee Gb))$　分配律
$\equiv (Fa \vee Ga) \wedge (Fb \vee Ga) \wedge (Fa \vee Gb) \wedge (Fb \vee Gb)$　結合律
$\equiv (Fa \vee Ga) \wedge (Fb \vee Gb) \wedge (Fb \vee Ga) \wedge (Fa \vee Gb)$　交換律

（右辺）$\equiv (Fa \vee Ga) \wedge (Fb \vee Gb)$

ここで，$(Fa \vee Ga) \wedge (Fb \vee Gb) \equiv p$，$(Fb \vee Ga) \wedge (Fa \vee Gb) \equiv q$とおくと，

（左辺）$\equiv p \wedge q$，　（右辺）$\equiv p$

従って，（左辺）⊃（右辺）は，$(p \wedge q) \supset p$

p	q	$(p \wedge q) \supset p$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	1

量化命題と条件法

例）　F: ～は白い，　G: ～は丸い

(1) $\exists x(Fx \supset Gx) \equiv (\forall xFx \supset \exists xGx)$

（白いなら丸いというものが存在する）
≡（すべてのものが白いならば，ある丸いものが存在する）

個体領域を(a, b)とすると，

（左辺）$\equiv \exists x(\sim Fx \vee Gx)$　条件法の定義17
$\equiv (\sim Fa \vee Ga) \vee (\sim Fb \vee Gb) \equiv \sim Fa \vee Ga \vee \sim Fb \vee Gb \equiv \sim Fa \vee \sim Fb \vee Ga \vee Gb$

（右辺）$\equiv \sim \forall xFx \vee \exists xGx$　条件法の定義
$\equiv \exists x \sim Fx \vee \exists xGx$　[← $\sim \forall xFx \equiv \exists x \sim Fx$]
$\equiv (\sim Fa \vee \sim Fb) \vee (Ga \vee Gb) \equiv \sim Fa \vee \sim Fb \vee Ga \vee Gb$

(2) $(\exists xFx \supset \forall xGx) \supset \forall x(Fx \supset Gx)$

（あるものが白いならばすべてのものが丸い）ならば（すべてのものは白ければ丸い）

個体領域を(a, b)とすると，

（左辺）$\equiv \sim\exists xFx \vee \forall xGx$　条件法の定義

$\equiv \forall x\sim Fx \vee \forall xGx$　[← $\sim\exists xFx \equiv \forall x\sim Fx$]

$\equiv (\sim Fa \wedge \sim Fb) \vee (Ga \wedge Gb)$

（右辺）$\equiv \forall x(\sim Fx \vee Gx)$　条件法の定義

$\equiv (\sim Fa \vee Ga) \wedge (\sim Fb \vee Gb)$

$\equiv ((\sim Fa \vee Ga) \wedge \sim Fb) \vee ((\sim Fa \vee Ga) \wedge Gb)$　分配律

$\equiv ((\sim Fa \wedge \sim Fb) \vee (Ga \wedge \sim Fb)) \vee ((\sim Fa \wedge Gb) \vee (Ga \wedge Gb))$　分配律

$\equiv (\sim Fa \wedge \sim Fb) \vee (Ga \wedge \sim Fb) \vee (\sim Fa \wedge Gb) \vee (Ga \wedge Gb)$　結合律

$\equiv (\sim Fa \wedge \sim Fb) \vee (Ga \wedge Gb) \vee (Ga \wedge \sim Fb) \vee (\sim Fa \wedge Gb)$　交換律

ここで，$(\sim Fa \wedge \sim Fb) \vee (Ga \wedge Gb) \equiv p$，$(Ga \wedge \sim Fb) \vee (\sim Fa \wedge Gb) \equiv q$ とおくと，

（左辺）$\equiv p$，（右辺）$\equiv p \vee q$

従って，（左辺）⊃（右辺）は，$p \supset (p \vee q)$

p	q	$p \supset (p \vee q)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	1

量化命題の一般的表現(1)(2)

・有限な個体領域ならば，全称命題は連言($\wedge$)で展開できる．
存在命題は選言($\vee$)で展開できる．
しかし，
・一般化すると，この手法はとれないので，次の手法をとる．

全称命題：全称記号のあとに，条件文を従える．
存在命題：存在記号のあとに，連言文を従える．

(1) 全称肯定命題　$\forall$と$\supset$

「すべての学生はアラブ語ができる」
→すべてのxについて，xが学生であるならば，xはアラブ語ができる．
→すべてのxについて，(xは学生である)⊃(xはアラブ語ができる)
→ $\forall x(Fx \supset Gx)$
但し，F: ・・・は学生である，G: ・・・はアラブ語ができる

Nota Bene　$\forall x(Fx \supset Gx) \equiv \forall x(\sim Fx \vee Gx)$ と $\forall x(Fx \wedge Gx)$ は異なる．

問題　$\forall x(Fx \wedge Gx)$ を日常言語（日本語）で表現せよ．

(2) 存在肯定命題　∃と∧

「ある学生はポーランド語ができる」
→あるxについて，xは学生であって，かつ，xはポーランド語ができる．
→あるxについて，(xは学生である)∧(xはポーランド語ができる)
→$\exists x(Fx \land Gx)$
但し，F: ・・・は学生である，G: ・・・はポーランド語ができる

N.B.　$\exists x(Fx \land Gx)$　と　$\exists x(Fx \supset Gx) \equiv \exists x(\sim Fx \lor Gx)$　は異なる．

問題　$\exists x(Fx \supset Gx)$ を日常言語（日本語）で表現せよ．

量化命題の一般的表現(3)(4)

(3) 全称否定命題　∀と⊃と～

「すべての学生はチェコ語ができない」
→すべてのxについて，xが学生であるならば，xはチェコ語ができない．
→すべてのxについて，(xが学生である)⊃～(xはチェコ語ができる)
→ $\forall x(Fx \supset \sim Gx)$
但し，F: ・・・は学生である，G: ・・・はチェコ語ができる

N.B. $\forall x(Fx \supset \sim Gx)$ と $\sim \forall x(Fx \supset Gx)$ は異なる．

問題　$\sim \forall x(Fx \supset Gx)$ を日常言語（日本語）で表現せよ．

(4) 存在否定命題　∃と∧と～

「ある学生はチベット語ができない」
→あるxについて，xは学生であって，かつ，xはチベット語ができない．
→あるxについて，(xは学生である)∧～(xはチベット語ができる)
→ $\exists x(Fx \land \sim Gx)$
但し，F: ・・・は学生である，G: ・・・はチベット語ができる

N.B. $\exists x(Fx \land \sim Gx)$ と $\sim \exists x(Fx \land Gx)$ は異なる．

問題　$\sim \exists x(Fx \land Gx)$ を日常言語（日本語）で表現せよ．

問題　量化命題の一般的表現(1)～(4)に従って，次の文を記号化せよ（使用する記号は各自で定義せよ）．

(1) 義昭は東大卒（たばだい）卒だが，腹が出ている．

(2) 足は速いが，野球はできない者がいる．

(3) 足の速い者はみんな野球ができない．

(4) ある学生はチェロかピアノを弾く．