

論理学入門

論理学の対象：

論証 demonstration や推論 syllogism

5

論証（や推論）の暫定的定義：

いくつかの前提（命題）から，一つの結論（命題）が導かれる（論理的）操作（また，それを書き表わしたもの）．三段論法といわれる推論では，前提（命題）は2つ，結論（命題）は1つであるが，前提（命題）が3つ以上ある推論や，前提（命題）が一つしかない推論もあり得る．しかし，いずれの場合も，結論（命題）は一つである．

10

論理学で扱う命題propositionと日常言語の文との違い：

日常言語の文には，平叙文，疑問文，命令文，感嘆文などがあるが，論理学で扱う命題は，平叙文のみである．命題（平叙文）は，その命題が表現している事象（事態，状況，ことがら）と一致していれば，真(true)といい，一致していなければ，偽(false)という．この意味で真偽を確定できるものだけが，命題である（ただし，確定の手段については，問題があるので以上は，暫定的定義としておく）．

15

論証（や推論）の妥当性と正しさ：

論理学では，論証（や推論）の妥当性validity(validであること)を以下のように定める．

「いくつかの前提（命題）から，結論が導かれる」論証（や推論）を妥当である，という．

これに対して，論証（や推論）が「正しい」というときには，論証（や推論）が妥当であるだけでなく，前提がすべて真であり，従って，結論も真である，というのが，日常言語的な意味であると思われる．

20

論証（や推論）の妥当性は，前提（命題）や結論（命題）それ自体の真偽とは関係なく論じられる．

25

次の例は，推論かどうか，それは妥当かどうか（妥当性をもつかどうか）．

例1) クリントンはアメリカの大統領である．（前提命題）

クリントンは中国で生まれた．（前提命題）

それゆえ，中国生まれのアメリカの大統領がいる．（結論命題）

30

例2) クリントンはアメリカの大統領である．

あるアメリカの大統領は鬚をはやしている．

従って，クリントンは鬚をはやしていない．

例3) 日本の首都は東京である．

35

広島県の県庁所在地は広島である．

ゆえに，北海道で一番大きな都市は札幌である．

例4) ある学生は論理学を履修する．

論理学を受講する者は誰も法学を履修できない．

ゆえに，学生の中に法学を履修できない者がいる．

40

命題論理と述語論理

命題論理では，推論の構成要素として，命題propositionを最小単位として扱う．命題には，それ以上分解できないタイプの命題があり，それは要素命題と呼ばれる．複数の命題に分解できる命題を複合命題と呼ぶ．

45

要素命題を単位として記号化し，それらの命題どうしの関係を表現する記号（論理結合子といい，命題論理では5つを用いることが多い）を用いて，推論を表現することができる．

例1) 「今日は晴れている」

例2) 「今日は晴れていて、暖かい」

50

例1)は、要素命題であり、 p と記号化できる。

例2)は、「今日は晴れている、かつ、今日は暖かい」と分解できるので、 p かつ q と表現できる。

55

論理結合子としては、5種類のものを用いることが多い(実は、表現法によって、同じ論理的な命題を5種類の記号を用いても、1種類の記号を用いても、またもっと多くの記号を用いても表現可能である)。

今、命題「今日は晴れている」を p , 命題「今日は暖かい」を q と表すことにする。

60

[1]否定 \sim

$\sim p$: p でない

[2]連言

$p \ q$: p かつ q

65

[3]選言

$p \ q$: p または q

[4]条件法(if)

$p \ q$: p ならば q

[5]双条件(if and only if)

70

$p \ q$: p のときそしてそのときだけ q

以上の記号を用いて、命題論理によって、かなりの推論の妥当性を確かめることができるが、命題論理では、推論の妥当性を扱い得ないものもある。そこで、命題の構成要素を分析して表現する述語論理 Predicate logic が導入された。

75

1. 命題論理から述語論理へ

推論(1)

義昭は哲学者なら、腹が出ている。 $p \ q$

80

義昭は哲学者である。 p

義昭は腹が出ている。 q

注) \rightarrow は、論理結合子といい、「 $\cdot \cdot \rightarrow \cdot \cdot$ 」と書いて、「 $\cdot \cdot$ ならば $\cdot \cdot$ 」と読む。

85

推論(2)

すべての哲学者は腹が出ている。 p

義昭は哲学者である。 q

義昭は腹が出ている。 r

90

推論(3)

義昭は腹が出ている。 p

腹が出ている者が少なくとも一人いる。 q

命題論理では、論理分析の最小単位が真偽を問題にできる要素命題に制限されていたので、上

95 記の推論(1)の妥当性を示すことはできるが、推論(2)(3)の妥当性に関しては、これを示すことができない。推論(2)(3)を扱うためには、要素命題の内部構造を分析する方法をとらなければならない(述語論理)。

2. 単称命題

100

個体定項：「義昭」のように特定の個体 individual を表わす。a, b, c など。

述語記号：「腹が出ている」のように個体の性質を表わす。F, G, H など。

105 「義昭」をa, 「日本」をbで表わし, 「・・・は腹が出ている」をF, 「・・・は島国である」をGで表わすことにすると、以下のようになる(単称命題)。

(1) 「義昭は腹が出ている」 Fa

(2) 「日本は島国である」 Gb

110 単称命題は、真偽を確定し得る。

3. 命題関数 Propositional function

個体変項：不特定の個体を表わす。x, y, z など。

115

個体変項をx, yとし, 「・・・は腹が出ている」をF, 「・・・は島国である」をGで表わすことにすると、以下のようになる(命題関数)。

(1) 「xは腹が出ている」 Fx

120 (2) 「yは島国である」 Gy

命題関数は、真偽を確定し得ないが、個体変項xを個体定項aに置き換えれば、 Fa (単称命題)となり、真偽を確定し得る。

125 4. 量化記号 Quantifier

4-1. 全称記号 Universal quantifier と存在記号 Existential quantifier

全称記号 「すべて」

130 存在記号 「少なくともひとつ」

全称量子子 x 「すべてのxについて」

存在量子子 x 「少なくともひとつのxについて」

135 全称命題 $\forall x Fx$ 「すべてのxについて、xはFである」・・・(1)

存在命題 $\exists x Fx$ 「少なくともひとつのxについて、xはFである」・・・(2)

(1)は、「すべてのxはFである」とも読まれる。

(2)は、「或るxはFである」あるいは「Fであるxが少なくともひとつ存在する」とも読まれる。

140 また、(2)は特称命題とも呼ばれる。

以上の事柄は，述語論理を扱う際に，あらためて取り上げるが，はじめに問題にした推論(2)と(3)は，以下のように表現できる．

145 推論(2)

「～は哲学者である」をF
 「～は腹が出ている」をG
 「義昭」をaとすると，
 $\forall x(Fx \supset Gx)$

150 Fa
 Ga

推論(3)

155 Ga
 $\exists xGx$

ここから先は，後に，述語論理を詳しくみる機会にゆずることとし，まず，命題論理の基礎から学ぶことにしよう．

160 命題論理

5つの論理結合子と命題の真偽

論理結合子としては，以下の5つを用いる．p, qはそれぞれ命題を表わす．

- 165
1. 否定： \sim $\sim p$ 「pではない」
 2. 連言： p q 「pかつq」
 3. 選言： p q 「pまたはq」
 4. 条件法： p q 「pならばqである」
 - 170 5. 双条件： p q 「pとqは等値」「pならばqであり，かつ，qならばpである」

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \supset q$	$p \equiv q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

次の命題を記号化しなさい．

- 175
- 1) 「雨は降っても，風はふかない」
 - 2) 「私はバスかタクシーに乗る」
 - 3) 「風がふけば，桶屋がもうかる」
 - 4) 「太郎は食事をすませたら，コーヒーか紅茶を飲む」
 - 5) 「花子が太郎が来たときそしてそのときだけ私たちは野球ができる」

180

論理結合子に関する注意

2. 連言に関する注意 $p \wedge q$ 「pかつq」

185 1) 連言記号 \wedge に対応する日常言語には、「そして」「かつ」「さらに」「また」「・・・であって・・・」「しかし」「だが」「・・・が・・・」などがある。

1-1) 「そのチームは人気がある。しかし、弱い」

1-2) 「そのチームは人気があり、そして弱い」

190

2) 連言記号 \wedge は、時間的前後関係を意味しない。

2-1) 「花子は結婚して、子供を産む」

2-2) 「花子は子供を産んで、結婚する」

195

3. 選言に関する注意 $p \vee q$ 「pまたはq」

日本語の「あるいは」には、以下の2つの意味がある。

200 両立的選言： p と q のいずれかが真である。しかも、 p と q がともに真であることが可能である。

排他的選言： p と q のいずれかが真である。しかし、 p と q がともに真であることは不可能である。

205 選言 $p \vee q$ は、両立的選言の意味で用いる。排他的選言を表現したいならば、 $p \vee q$ を両立的選言として、

$(p \wedge q) \vee \sim(p \wedge q)$

210 と表現できる。

4. 条件法に関する注意 $p \supset q$ 「pならばqである」

左側の命題(p)を前件、右側の命題(q)を後件と呼ぶ。

215

$p \supset q$ の読み方としては、以下のように読んでもよい。

「 p は q のための十分条件である」

「 q は p のための必要条件である」

「 q のときだけ p である」(「 p であるのは q のときだけである」)

220 「 p であって q でない、ということはない」 $\sim(p \wedge \sim q)$

条件法 \supset に対応する日常言語には、「ならば」「すれば」「のとき」などがある。

しかし、以下の点で、日常言語とは異なる。

225

1) 条件法 \supset は、時間的前御関係を含まない。

2) 条件法 \supset は、まったく関係のない2つの命題を結合して、その真偽を問える。

- 2-1) (薔薇は植物である) (CDは円形である)
 2-2) (薔薇は植物である) (CDは六角形である)
 230 2-3) (薔薇は鉱物である) (CDは円形である)
 2-4) (薔薇は鉱物である) (CDは六角形である)

論理結合子の結合力

235 $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ の順に弱くなる, と取り決めておく. その上で, 必要に応じて, () を用いる.

真理表の行数

P	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

P	q	r	$p \vee q$	$\sim r$	$(p \vee q) \wedge \sim r$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0

240 真理関数

数学でいう関数では, 変数xの値が決まると, $y=f(x)$ のyの値も決まるが, それにならって, 要素命題(pやq)の真理値(1か0, すなわち, 真か偽)が決まると, 複合命題(例えば, $p \sim q$)
 245 全体の真理値が決まるので, これを真理関数ということがある.

[関数] $f(x, y)=x^2+xy-y^2$
 $f(1, 1)=1$
 $f(1, 2)=-1$
 $f(2, 1)=5$
 $f(2, 2)=4$

[真理関数] $f(p, q)=p \sim q$
 $f(1, 1)=1$
 $f(1, 0)=1$
 $f(0, 1)=0$
 $f(0, 0)=1$

関数の式(x^2+xy-y^2 など)と数値についていえることは, 命題論理の複合命題($p \sim q$ など)と真理値についていえる.

255 練習 次の複合命題の真理表を作りなさい.

- 1) $\sim p \vee q$
 2) $(p \vee q) \wedge p$
 3) $\sim p \wedge (q \vee p)$
 260 4) $q \wedge (\sim p \vee r)$

体系性

5つの論理結合子は、もっとも簡潔な仕方で、より多くの推論を説明するためのものであり、これによって、もっともシンプルな論理学体系ができあがる。要素命題が、 p と q の2つだけの場合、 p と q からなる複合命題がとる真理値の可能性は、以下のようなになる。

p と q からなる複合命題の真理表は、4行になる。1行目の真偽の可能性は2通り、2行目も2通り、3行目も2通り、4行目も2通り。従って、計 $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ 通り。

P	q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0

これらに対応する実際の命題は、以下の通り。

1. $p \sim p$ 2. $p \ q$ 3. $q \ p$ 4. $p \ q$ 5. $\sim p \ \sim q$ 6. p 7. q
 8. $\sim(p \ q)$ 9. $p \ q$ 10. $\sim q$ 11. $\sim p$ 12. $p \ q$ 13. $\sim(p \ q)$
 14. $\sim(q \ p)$ 15. $\sim(p \ q)$ 16. $p \ \sim p$

6. 7. は、要素命題そのまま。2. 4. 9. 11. 12. は、論理結合子の定義。
 3. 10. は、論理結合子が1つ。1. 8. 13. 14. 15. 16. は、論理結合子が2つ。
 5. のみが、論理結合子を3つ用いている。

論理結合子の節約

5つの論理結合子で複合命題を表現すれば、直観的にわかりやすいが、同じ複合命題を表現するために、必ずしも論理結合子が5つ必要なわけではない。ある論理結合子は別の論理結合子によって表現できるからである（論理結合子の節約）。

1) の節約

$p \ q$ は、すでに述べたように $(p \ q)$ $(q \ p)$ と同じである。このことを、 $p \ q$ と $(p \ q)$ $(q \ p)$ の真理表を作って確かめなさい。

2) と の節約

は、 \sim と \sim によって表現することができる。
 $p \ q$ と $\sim(\sim p \ \sim q)$ の真理表を作ってこのことを確かめなさい。
 以上から、論理結合子は、 \sim 、 \wedge 、 \vee の3つあればよいことになる。

さらに、 \sim は、 \sim と \sim によって表現することができる。
 $p \ q$ と $\sim(p \ \sim q)$ の真理表を作ってこのことを確かめなさい。

これで、論理結合子は、 \sim 、 \wedge の2つあればよいことになる。

300 練習

- 1) $p \rightarrow q$ と $\sim p \vee q$ の真理表を作り, \rightarrow は \sim と \vee で表現できることを示せ.
- 2) $p \rightarrow q$ と $\sim(\sim p \wedge \sim q)$ の真理表を作り, \rightarrow は \sim と \wedge で表現できることを示せ.
- 3) $p \rightarrow q$ と $\sim(p \wedge \sim q)$ の真理表を作り, \rightarrow は \sim と \wedge で表現できることを示せ.
- 4) $p \rightarrow q$ と $\sim p \vee q$ の真理表を作り, \rightarrow は \sim と \vee で表現できることを示せ.

305

シェファア(H.Sheffer, 1913)の記号

表現が煩瑣となることをいとわず, 論理結合子の節約を極限にまで押し進めたのが, シェファアの記号である. シェファアの記号には, 2種類あり, $|$ がそのひとつである.

310

$|$ は, p と q がともに1であるときのみ, $p | q$ は0と定義される. これを用いて, \sim , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow の5つの論理結合子を表現することができる.

[定義]

P	q	$p q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

[否定]

P	$\sim P$	$p p$
1	0	0
0	1	1

[条件法]

P	q	$p \supset q$	$p (q q)$
1	1	1	1 0
1	0	0	0 1
0	1	1	1 0
0	0	1	1 1

315

[連言]

P	q	$p \wedge q$	$(p q) (p q)$
1	1	1	0 1 0
1	0	0	1 0 1
0	1	0	1 0 1
0	0	0	1 0 1

[選言]

P	q	$p \vee q$	$(p p) (q q)$
1	1	1	0 1 0
1	0	1	0 1 1
0	1	1	1 1 0
0	0	0	1 0 1

[双条件]

320

$p \leftrightarrow q$
 $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
 $((p | q) | (q | p)) | ((p | q) | (q | p))$
 $((p | (q | q)) | (q | (p | p))) | ((p | (q | q)) | (q | (p | p)))$

325

シェファアの記号には, もうひとつ, \perp があり, p と q がともに0であるときのみ, $p \perp q$ は1と定義される.

練習 次の複合命題を $|$ で表現しなさい.

330

- 1) $p \wedge \sim q$
- 2) $\sim p \vee q$
- 3) $p \rightarrow (q \wedge r)$

複合命題の恒真・恒偽の判定(1) [真理表の方法]

複合命題は、とりうる真理値によって3つのタイプに分けられる。恒真命題・恒偽命題・偶然的命題の3種類である。

- 335
- 1) 恒真命題：要素命題の真理値にかかわらず、常に真である命題。
 - 2) 恒偽命題：要素命題の真理値にかかわらず、常に偽である命題。
 - 3) 偶然的命題：要素命題の真理値によって、真になったり偽になったりする命題。

340 複合命題のうちで、恒真命題と恒偽命題は、特別なタイプの命題であり、論理的に重要な意味があるが、数において最も多いのは、偶然的命題であると考えられる。

1) 恒真命題

345 例) $(p \supset q) (\sim p \vee q)$

P	q	$p \supset q$	$\sim p \vee q$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

$p \supset q$ と $\sim p \vee q$ は互いに言い換えることができる。

2) 恒偽命題

350 例) $p \wedge \sim p$ (矛盾命題)

P	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
1	0	0
0	1	0

355 3) 偶然的命題

例) $\sim p \vee q$ 真理表を作って、偶然的であることを示せ。

練習 次の各組のA, Bについて, A \supset Bが恒真であるか否かを示しなさい。

- 360
- 1) A: 学者は暗くて話し上手ではない, ということはない。
B: 学者は暗くなく話し上手だ。
 - 2) A: 監督がよくてチームがよければ, チームは強い。
B: 監督がよければ, チームがよいとチームは強い。

365 思考の法則

伝統的に思考の法則と呼ばれてきたものとして、同一律，矛盾律，排中律がある。

同一律：AはAである。

370 矛盾律：AがBであってBでない，ということはない。

排中律：AがBでもなくBでないものでもない，ということはない。

これを命題論理学では，次のように表現する。

375 同一律：(あるものはAである) (あるものはAである)

(あるものはAである) (あるものはAである)

矛盾律： $\sim((AはBである) \sim(AはBである))$

排中律： $(AはBである) \sim(AはBである)$

380 記号化すれば，以下の通り．これらはいずれも，恒真命題である。

同一律： $p \ p$ あるいは $p \ p$

矛盾律： $\sim(p \ \sim p)$

排中律： $p \ \sim p$

385

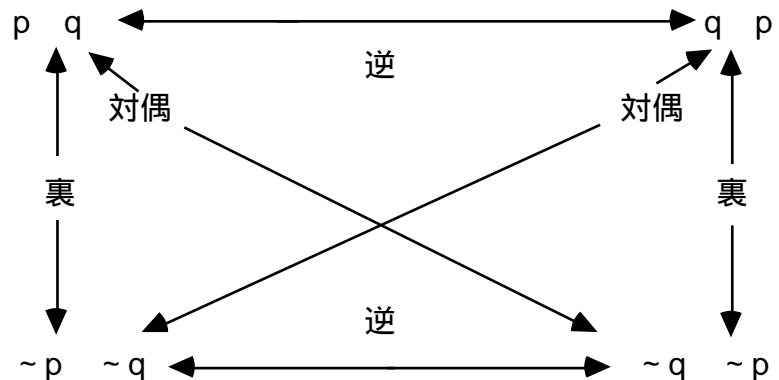
練習 同一律，矛盾律，排中律について真理表を作りなさい。

逆・裏・対偶

390 $p \ q$ に対して，
 $q \ p$ を逆，
 $\sim p \ \sim q$ を裏，
 $\sim q \ \sim p$ を対偶という．
 対偶のみが恒真である。

395

練習 逆・裏・対偶について
 真理表をつくりなさい。



問題 次の文を読んで，どこが間違っているのか，考えなさい。

400

「しかられないと勉強しない」と言われることがあるが，対偶をとると，「勉強するとしかられる」となる．対偶どうしは，真理値が等しい恒真命題のはずだが・・・

ド・モルガンの法則

405

次の2つの恒真命題はド・モルガン(De Morgan)の法則と呼ばれる。

(a) $\sim(p \ q) \ (\sim p \ \sim q)$

(b) $\sim(p \ q) \ (\sim p \ \sim q)$

410

練習 ド・モルガンの法則(a), (b)をそれぞれ，真理表を作って恒真であることを示しなさい。

二重否定律

$$\sim \sim p \quad p$$

415

複合命題の恒真・恒偽の判定(2) [真理値分析の方法]

真理値の演算

420

1) 否定記号の演算 $\sim 1 \quad 0, \sim 0 \quad 1$

2) 連言記号の演算 $1 \quad 1 \quad 1; 1 \quad 0 \quad 0, 0 \quad 1 \quad 0, 0 \quad 0 \quad 0$

3) 選言記号の演算 $1 \quad 1 \quad 1, 1 \quad 0 \quad 1, 0 \quad 1 \quad 1; 0 \quad 0 \quad 0$

425

4) 条件法記号の演算 $1 \quad 0 \quad 0; 1 \quad 1 \quad 1, 0 \quad 1 \quad 1, 0 \quad 0 \quad 1$

5) 双条件記号の演算 $1 \quad 1 \quad 1, 0 \quad 0 \quad 1; 1 \quad 0 \quad 0, 0 \quad 1 \quad 0$

430

例題 p が0で, q が1のとき, 以下の複合命題の真理値を求めよ.

$$(p \sim q) \sim p$$

$$(0 \sim 1) \sim 0$$

$$(0 \quad 0) \sim 0$$

435

$$(0 \quad 0) \quad 1$$

$$1 \quad 1$$

$$1$$

練習 p を1, q を0, r を1として, 以下の複合命題の真理値を求めよ.

440

1) $\sim(\sim p \sim q \sim r)$

2) $(\sim p \quad q) (p \sim r)$

3) $(p \quad r) (p (q \quad r))$

真理値分析の方法

445

真理値分析の方法では, 要素命題の真理が未定のものを含む場合を考える.

P	$p \wedge 1$	$1 \wedge p$	$p \wedge 0$	$0 \wedge p$	$p \vee 1$	$1 \vee p$	$p \vee 0$	$0 \vee p$
1	1	1	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	0	0

P	$1 \supset p$	$p \supset 1$	$0 \supset p$	$p \supset 0$	$1 \equiv p$	$p \equiv 1$	$0 \equiv p$	$p \equiv 0$
1	1	1	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0	1	1

450 5種類の論理結合子についてまとめると、以下のようになる。

1) 否定命題 $\sim 1 \ 0, \sim 0 \ 1$

2) 連言命題 $p \ 0 \ 0, 0 \ p \ 0; \ p \ 1 \ p, 1 \ p \ p$

455

3) 選言命題 $p \ 1 \ 1, 1 \ p \ 1; \ p \ 0 \ p, 0 \ p \ p$

4) 条件命題 $1 \ p \ p; \ p \ 1 \ 1, 0 \ p \ 1; \ p \ 0 \ \sim p$

460 5) 双条件命題 $1 \ p \ p, p \ 1 \ p; \ 0 \ p \ \sim p, p \ 0 \ \sim p$

の左右を比べると、左から右へと縮小されていることに注意せよ。この性質を利用して、与えられた命題の真理値を分析しようとするのが、真理値分析の方法である。

465 例1 $(p \ \sim q) \ \sim p$

pが1のとき

(1) $(1 \ \sim q) \ \sim 1$

(2) $1 \ \sim 1$

(3) $1 \ 0$

470 (4) 0

pが0のとき

(1) $(0 \ \sim q) \ \sim 0$

(2) $\sim q \ \sim 0$

(3) $\sim q \ 1$

(4) $\sim q$

qが1のとき

(1) ~ 1

(2) 0

qが0のとき

(1) ~ 0

(2) 1

偶然的

475

例2 $(p \ q) \ ((p \ q) \ (q \ p))$

pが1のとき

(1) $(1 \ q) \ ((1 \ q) \ (q \ 1))$

(2) $q \ ((1 \ q) \ (q \ 1))$

480 (3) $q \ (q \ (q \ 1))$

(4) $q \ (q \ 1)$

(5) $q \ q$

pが0のとき

(1) $(0 \ q) \ ((0 \ q) \ (q \ 0))$

(2) $\sim q \ ((0 \ q) \ (q \ 0))$

(3) $\sim q \ (1 \ (q \ 0))$

(4) $\sim q \ (1 \ \sim q)$

(5) $\sim q \ \sim q$

qが1のとき

(1) $1 \ 1$

(2) 1

qが0のとき

(1) $0 \ 0$

(2) 1

qが1のとき

(1) $\sim 1 \ \sim 1$

(2) $0 \ 0$

(3) 1

qが0のとき

(1) $\sim 0 \ \sim 0$

(2) $1 \ 1$

(3) 1

恒真

485

練習 真理値分析の方法によって、以下の複合命題が恒真か恒偽か偶然的かを判定せよ。

1) $(p \ q) \ \sim p$

490 2) $p \ (p \ p)$

3) $\sim(\sim p \ \sim q)$

4) $\sim(p \ q) \ (\sim p \ q)$

5) $(p \ q) \ (\sim q \ \sim p)$

6) $\sim(\sim p \ \sim q \ \sim r)$

495 7) $(p \ \sim q) \ (\sim p \ r)$

複合命題の恒真・恒偽の判定(3) [真理値割り当ての方法]

背理法 (帰謬法 , demonstratio ad absurdum)

500

p という命題を論証したいとき , p の否定を仮定し , そこから矛盾を導く . 矛盾が導かれたのは , p の否定を仮定したからであり , 矛盾が導かれないためには , p の否定を成り立たせないようにすること , すなわち , p が成り立つということである .

505 真理値割り当ての方法

与えられた命題が恒真であるか否かを判定したいとき , 与えられた命題を偽(0)と仮定する . 与えられた命題が恒偽であるか否かを判定したいとき , 与えられた命題を真(1)と仮定する .

510 例 1 [恒真の判定] (p → q) → p

$$\begin{array}{c} (p \rightarrow q) \rightarrow p \\ 0 \end{array}$$

まず , (p → q) → p を 0 と仮定する .

$$\begin{array}{c} (1) p \rightarrow q \quad (1) p \\ 1 \quad \underline{0} \end{array}$$

(p → q) → p が 0 となるように , p → q に 1 , p に 0 を割り当てる .

515

$$\begin{array}{c} (2) p \rightarrow (2) q \\ \times 1 \quad 1 \end{array}$$

p → q が 1 となるように , p に 1 , q に 1 を割り当てる .
恒真である .

[矛盾チェック]

520 手続き(1) 任意の要素命題の真理値に下線を引き , それを 基準命題 とする .

手続き(2) 基準命題 と矛盾する要素命題の左に × を記す .

手続き(3) 基準命題 と同一の命題記号であって , しかも 基準命題 と矛盾しない要素命題の左に × を記す .

525 例 1 の矛盾チェック

手続き(1) . . . (1) p の真理値 0 に下線を引く (これを 基準命題 とする) .

手続き(2) . . . (1) p の真理値 0 に矛盾する (2) p の真理値 1 の左に × を記す .

例 1 の真理値の割り当て方は一通りしかなく , その割り当て方では矛盾している . すなわち , 530 例 1 では , 矛盾しない割り当て方が一通りもない . それゆえ , (p → q) → p は恒真である .

例 2 [恒偽の判定] ~ (p → q) → ~ p

$$\begin{array}{c} \sim (p \rightarrow q) \rightarrow \sim p \\ 1 \end{array}$$

535

$$\begin{array}{c} (1) \sim (p \rightarrow q) \quad (1) \sim p \\ 1 \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (2) p \rightarrow q \quad (4) p \\ 0 \quad 0 \end{array}$$

540

$$\begin{array}{c} (3) p \rightarrow (3) q \\ \underline{0} \quad 0 \end{array}$$

恒偽でない (p が 0 , q が 0 のとき , 真となる)

545 練習 次の命題が恒真か否かを真理値割り当ての方法によって判定せよ．恒真でない命題については，その命題を偽とする要素命題の真理値を明記せよ．

- 1) $(\sim p \vee q) \wedge p$
- 2) $(p \wedge \sim q) \vee p$

550 練習 次の命題が恒偽か否かを真理値割り当ての方法によって判定せよ．恒偽でない命題については，その命題を真とする要素命題の真理値を明記せよ．

- 1) $(p \vee q) \wedge \sim p$
- 2) $p \wedge \sim(\sim p \vee q)$

555 例 1 と例 2 は，真理値の割り当て方が一通りであったが，そのようなケースは特別であるから，割り当て方が二通り以上あるケースを考えることにする．

例 3 [恒真の判定] $((p \vee q) \wedge \sim p) \vee q$

	$((p \vee q) \wedge \sim p) \vee q$	
	0	
560	(1) $(p \vee q) \wedge \sim p$	(1) q
	1	<u>0</u>
	(2) $p \vee q$	(2) $\sim p$
	1	1
	(3) p	(3) q
	x 1	x 1
565	x 1	<u>0</u>
	0	x 1
		恒真である

例 3 は，全体として 3 通りの割り当て方があるが，そのすべての割り当て方が矛盾する．

例 4 [恒真の判定] $(p \vee q) \wedge \sim p$

	$(p \vee q) \wedge \sim p$	
	0	
570	(1) $p \vee q$	(1) $\sim p$
	1	0
	(2) p	(2) q
	1	1
575	1	<u>1</u>
	x 0	1
		恒真でない

例 4 は，全体として 3 通りの割り当て方があるが，矛盾が生じているのは一つの割り当て方だけである．つまり，矛盾しない割り当て方が，少なくとも一つあることになる．

580 練習 次の命題が恒真か否かを真理値割り当ての方法によって判定せよ．恒真でない命題については，その命題を偽とする要素命題の真理値を明記せよ．

- 1) $((p \vee q) \wedge p) \vee q$
- 2) $(p \vee q) \wedge (p \vee q)$

585 練習 次の命題が恒偽か否かを真理値割り当ての方法によって判定せよ．恒偽でない命題については，その命題を真とする要素命題の真理値を明記せよ．

- 1) $((p \vee q) \wedge q) \wedge \sim p$
- 2) $(p \vee q) \wedge ((p \vee q) \wedge (q \vee r))$

590

例5 [恒真の判定] $p \equiv (p \wedge q)$

		$p \equiv (p \wedge q)$	
		0	
595	(1) p	(1) p	(1) p
	1	0	0
	(1) p ∧ q	(1) p ∧ q	(1) p ∧ q
	0	1	1
	(2) p	(2) p	(2) p
	○ 1	× 1	× 1
	(2) q	(2) q	(2) q
	0	1	1
	○ 1	× 0	× 0
	0	1	0
	× 0	× 0	× 0
	0	0	0
			∴ 恒真でない

600 例5の割り当ては、4通りあり、そのうち、左側の(2)の1段目(pが1, qが0)の割り当てで矛盾が生じていない。ゆえに、 $p \equiv (p \wedge q)$ は恒真ではない。

605 一般に、矛盾しない割り当てが一つ見つければ、そのあとは割り当てをする必要がない。従って、左側の(2)の1段目の割り当てで矛盾が生じないことがわかった時点で、恒真か否かを判定するという点に関しては、手続きを終了させてもよかったことになる。

方略(1) 割り当てが複数になる手順は後回しにする。

610 方略(2) すでに、真理値の確定している要素命題をもとにして、矛盾する割り当てをあらかじめ排除する。

方略(1)(2)に従って、例3を判定してみる。

615	例3' [恒真の判定] $((p \vee q) \wedge \sim p) \supset q$	方略(1)・・・(2) $p \vee q$ を1とする割り当てよりも、(2) $\sim p$ を1とする割り当てを先行させる。
	$((p \vee q) \wedge \sim p) \supset q$	方略(2)・・・(3)の結果から、pが0でなくてはならないから、(4) pが1になれば必ず矛盾が生じる。そこで、(2) $p \vee q$ の割り当てにあたって、(3)の結果を用いて、(4) pの真理値を0にする((1)の結果を用いて、qの真理値を0にしてもよい)。
	0	こうして、矛盾する割り当てをあらかじめ排除すれば、より少ない割り当ての中から、矛盾しない割り当てをさがすことができる。
620	(1) $(p \vee q) \wedge \sim p$	(1) q
	1	0
	(2) $p \vee q$	(2) $\sim p$
	1	1
	(4) p	(4) q
	0	× 1
	(3) p	(3) p
	0	0
		∴ 恒真である

625 練習 方略(1)(2)に従って、次の命題が恒真か否かを判定せよ(既出の命題もある)。

- 1) $(p \supset q) \equiv (\sim p \vee q)$
- 2) $((p \supset q) \wedge p) \supset q$

630 複合命題の恒真・恒偽の判定(4) [標準化の方法]

命題を一定のかたちに変形することによって、複合命題の性質(恒真か恒偽か偶然的か)を判定する方法があり、標準化の方法と呼ばれる。

(1) 連言標準形

635 $(\bigcirc \vee \bigcirc \vee \bigcirc \vee \dots) \wedge (\bigcirc \vee \bigcirc \vee \bigcirc \vee \dots) \wedge \dots \wedge (\bigcirc \vee \bigcirc \vee \bigcirc \vee \dots)$

連言肢 連言肢 連言肢

ある命題を連言標準形にすると，その命題がどういうときに偽になるかがわかる．
ある命題AやBを変形して，以下のようなになったとする．

640

A (...) (p q ~r) ··· (...)

命題Aは，pが0，qが0，rが1のとき，0となることがわかる．

645

B (...) (p ~p ...) ··· (...)

連言肢の中にp ~pがあらわれると，その連言肢の真理値は1になる．

(2)恒真性の判定

650

方針(1) , を ~ , , に置き換える．

(p q) ((p q) (q p)) [双条件の定義]

(p q) (~p q) [条件法の定義]

方針(2) ~が要素命題の直前につくようにする．

655

~(p q) (~p ~q) [ド・モルガン]

~(p q) (~p ~q) [ド・モルガン]

方針(3)二重否定を消去する．

~ ~p p [二重否定]

方針(4)分配することによって，連言あるいは選言の標準形をつくる．

660

(p (q r)) ((p q) (p r)) [分配律]

(p (q r)) ((p q) (p r)) [分配律]

方針(5)必要に応じて，以下の公式を用いる．

(p p) p [反復律]

(p p) p [反復律]

665

(p q) (q p) [交換律]

(p q) (q p) [交換律]

(p (q r)) ((p q) r) [結合律]

(p (q r)) ((p q) r) [結合律]

その他，必要に応じて，別紙「基本的恒真式」を参照．

670

例1 ((p q) ~p) q

~((p q) ~p) q [条件法の定義]

(~(p q) ~ ~p) q [ド・モルガン]

(~(p q) p) q [二重否定律]

675

((~p ~q) p) q [ド・モルガン]

(~p ~q) (p q) [結合律]

(p q) (~p ~q) [交換律]

((p q) ~p) ((p q) ~q) [分配律]

(p ~p q) (p q ~q) [結合律2回]

680

p ~pとq ~qは恒真命題なので，それぞれ1と置く．

(1 q) (p 1)

1 1

1

恒真である

685 例2 $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow \sim q$
 $\sim((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow \sim q$ [条件法の定義]
 $(\sim(p \rightarrow q) \wedge \sim p) \rightarrow \sim q$ [ド・モルガン]
 $((\sim p \wedge \sim q) \wedge \sim p) \rightarrow \sim q$ [ド・モルガン]
 $(\sim p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$ [結合律]
690 $(\sim p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$ [交換律]
 $((\sim p \wedge \sim q) \wedge \sim p) \wedge ((\sim p \wedge \sim q) \wedge \sim q)$ [分配律]
 $(\sim p \wedge \sim q \wedge \sim p) \wedge (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim q)$ [結合律2回]
 $(\sim p \wedge \sim p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim q)$ [交換律]
 $(\sim p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$ [反復律2回]
695 $\sim p \wedge \sim q$ [反復律]

恒真でない(pが1, qが1のとき0になる)

例3 $((\sim p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow r$
 $(p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)) \rightarrow r$ [交換律]
700 $((p \rightarrow \sim p) \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow r$ [分配律]

ここで, $(p \rightarrow \sim p)$ を削除する. $p \rightarrow \sim p$ の真理値はつねに1であり, 1 $(p \rightarrow q)$ の真理値は $p \rightarrow q$ の真理値と同じである.

$(p \rightarrow q) \rightarrow r$
 $p \rightarrow q \rightarrow r$ [結合律]
705 恒真でない(pが0, qが0, rが0のとき0になる)

(3)選言標準形

710 $(\quad \dots) \vee (\quad \dots) \vee \dots \vee (\quad \dots)$
選言肢 選言肢 選言肢

ある命題を選言標準形にすると, その命題がどういうときに真になるかがわかる.
ある命題AやBを変形して, 以下のようなにしたとする.

715 A $(p \rightarrow \sim q \wedge r) \vee (p \wedge q \rightarrow \sim r) \vee (\sim p \wedge q)$

選言命題が真となるには, 少なくとも1つの選言肢が真であればよいから, pが1, qが0, rが1のとき, pが1, qが1, rが0のとき, pが0, qが1のとき(このときrは1でも0でもよい), いずれかのとき, 命題Aは1になる.

720 B $(\quad \dots) \vee (\quad \underline{p} \wedge \sim p \quad \dots) \vee \dots \vee (\quad \dots)$

選言肢の中に, 恒偽命題 $p \wedge \sim p$ があらわれると, その選言肢の真理値は0になる.

725 (4)恒偽性の判定

例1 $\sim(((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow \sim q)$
 $\sim(\sim((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow \sim q)$ [条件法の定義]
 $\sim\sim((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow \sim\sim q$ [ド・モルガン]
730 $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$ [二重否定2回]
 $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow q)$ [結合律]

$(p \vee q) \vee (p \wedge q)$ [交換律]
 $((p \vee q) \wedge p) \vee ((p \vee q) \wedge q)$ [分配律]
 $(p \vee q) \wedge (p \vee q)$ [結合律 2回]
 $(p \vee p) \wedge (p \vee q)$ [交換律]
 $(p \vee q) \wedge (p \vee q)$ [反復律 2回]
 $p \vee q$ [反復律]

恒偽でない(p が1, q が1のとき, 1になる)

740 例2 $\sim(((p \vee q) \wedge p) \wedge q)$
 $\sim(\sim((p \vee q) \wedge p) \wedge q)$ [条件法の定義]
 $\sim(\sim((\sim p \vee q) \wedge p) \wedge q)$ [条件法の定義]
 $\sim(\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \wedge q)$ [交換律]
 $\sim(\sim((p \vee \sim p) \wedge (p \vee q)) \wedge q)$ [分配律]

745 ここで, $(p \vee \sim p)$ を削除する. $p \vee \sim p$ はつねに0であり, 0 $(p \vee q)$ の真理値は, $p \vee q$ の真理値と同じである.

$\sim(\sim(p \vee q) \wedge q)$
 $\sim \sim(p \vee q) \vee \sim q$ [ド・モルガン]
 $(p \vee q) \vee \sim q$ [二重否定律]
 $p \vee q \vee \sim q$ [結合律]

750 恒偽命題 $q \vee \sim q$ のかわりに0とおく.

$p \vee 0$
 0 恒偽である

755 (5)完全連言標準形と完全選言標準形

完全連言標準形: 各連言肢がもとの命題に含まれるすべての要素命題を含む連言標準形.
 完全選言標準形: 各選言肢がもとの命題に含まれるすべての要素命題を含む選言標準形.

760 例 完全でない連言標準形を完全連言標準形に変形する

$(p \vee q) \wedge (\sim p \vee q \vee \sim r)$
 $((p \vee q) \wedge (r \vee \sim r)) \wedge (\sim p \vee q \vee \sim r)$ ($r \vee \sim r$)を加えても真理値は変わらない
 $((p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \sim r)) \wedge (\sim p \vee q \vee \sim r)$ [分配律]
 $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee q \vee \sim r)$ [結合律]

765 完全連言標準形にすると, 要素命題がどういう真理値をとるときに, もとの命題が偽になるかが一目瞭然である (p が0, q が0, r が0のときと, p が0, q が0, r が1のときと, p が1, q が0, r が1のとき).

770 練習 完全連言標準形にきなさい.

$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$

練習 完全選言標準形にきなさい.

775 $(p \vee q) \vee \sim(p \vee r)$

推論 inference, syllogism

780

1. 推論の妥当性 validity の判定 (1) 真理表

例 1 義昭は物理学者ならば、学者だ。
義昭は学者ではない。

785

義昭は物理学者ではない。(条件三段論法)

「義昭は物理学者である」を p
「義昭は学者である」を q とする。

790

p q ~q ~p

P	q	$P \supset q$	$\sim q$	$\sim P$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

推論が妥当であるかどうかを判定するためには、前提すべてが1のときに、必ず結論も1であるかどうかをみる。

4行目

手順(1) 2つの前提が両方とも1であるのは、4行目だけ(p qが1, ~qが1)である。

795

手順(2) そのときの結論の真理値は1である。

例1の推論は妥当 valid である。

推論が妥当であるというのは、前提すべてが1であれば、必ず結論も1である、ということである。前提すべてが1であるのに、結論が1にならない場合がひとつでもあるならば、その推論は妥当ではない。

800

例 2 義昭は日本人ならば、東洋人である。
義昭は東洋人である。
義昭は日本人である。

805

「義昭は日本人である」を p,
「義昭は東洋人である」を q とする。

810

p q q p

P	q	$P \supset q$	q	P
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	0
0	0	1	0	0

手順(1) 前提すべての真理値が1になっているのは、1行目と3行目である。
手順(2) そのときの結論の真理値は、1行目は1であるが、3行目は0である。
前提すべてが1のとき、結論は必ずしも1になっていない。

例2の推論は妥当ではない。

815 注意) 前提すべてが1であるときには, 必ず結論は1になる, という関係がなりたっていれば, たとえ, 前提も結論も0になる場合があったとしても, その推論は妥当である. つまり, 前提や結論それぞれが単独に真であるか偽であるかということと, 推論としての妥当性とは関係がない.

820 練習 真理表を使って次の推論の妥当性を判定しなさい. (例1, 2にならって, 命題を記号化して, 推論を記号で表現すること. 妥当でない推論については, そのときの要素命題の真理値を明記すること)

- 825 1) 義昭か卓爾が犯人だ.
 義昭は犯人でない.
 卓爾が犯人だ. (選言三段論法)
- 2) クリントンはエチオピア人ならば, 東洋人だ.
 クリントンはエチオピア人だ.
 クリントンは東洋人だ. (前件肯定式 modus ponens)
- 830 3) 阪神パークは兵庫県にある.
 阪神パークは遊園地である.
 阪神パークは兵庫県にある遊園地である.
- 835 4) 太郎は体調が悪くなければ, この球が打てる.
 太郎はこの球が打てない.
 太郎は体調が悪い. (後件否定式 modus tollens)

840 例3 悟は勉強すれば, 単位をとることができる.
 悟は単位をとることができれば, 卒業できる.
 悟は勉強すれば, 卒業できる.

「悟は勉強する」をp, 「悟は単位をとることができる」をq, 「悟は卒業できる」をr, とする.

845 $p \rightarrow q, q \rightarrow r \quad p \rightarrow r$ (条件三段論法)

P	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

手順(1) 前提の真理値が両方とも1になっているのは, 1, 5, 7, 8行目である.
 手順(2) そのときの結論の真理値は, 4行とも1である.

前提すべてが1のとき, 結論も必ず1なので, この推論は妥当である.

練習 真理表を使って次の推論の妥当性を判定しなさい。(命題を記号化して、推論を記号で表現すること。妥当でない推論については、そのときの要素命題の真理値を明記すること)

- 850 1) 都市が緑化されれば、野鳥が多くなる。
 都市が緑化されなければ、CO₂濃度が高くなる。
 CO₂濃度が高くならなければ、野鳥が多くなる。
- 855 2) 幹子は論理学者ならば、成人である。
 幹子は成人ならば、酒が飲める。
 幹子は酒がのめないならば、論理学者ではない。

推論の2つの前提をA, Bとし、結論がCであるとき、(A ∧ B) ⊃ Cが恒真であれば、その推論は妥当である。

A	B	C	(A ∧ B) ⊃ C
1	1	1	1 1
1	1	0	1 0
1	0	1	0 1
1	0	0	0 1
0	1	1	0 1
0	1	0	0 1
0	0	1	0 1
0	0	0	0 1

一般に、前提を で結合した命題を前件とし、結論を後件とする条件命題が恒真であるとき、そしてそのときだけ、その推論は妥当である。

例 1' (p.19)
 p q, ~q ~p

P	q	((P ⊃ q) ∧ ~q) ⊃ ~P
1	1	1 0 0 1 0
1	0	0 0 1 1 0
0	1	1 0 0 1 1
0	0	1 1 1 1 1

妥当である

練習 p.20の練習およびp.21の練習を上記の方法で、その推論が妥当か否かを判定しなさい。

2. 推論の妥当性の判定(2) 真理値割り当ての方法

すべての前提に1, 結論に0を割り当てる。

恒真・恒偽の判定の場合と同じ

すべての要素命題の真理値が決まる

(a) 矛盾しない割り当てが一つもない (b) 矛盾しない割り当てが少なくとも一つある

推論は妥当である 推論は妥当でない

(a) 矛盾しない割り当てが一つもなければ，前提すべてを1，結論を0とするように，各要素命題に真理値を割り当てることができない．すなわち，前提すべてが1で，結論が0となることはない．それ故，推論は妥当である．

880

(b) 矛盾しない割り当てが一つあれば，少なくとも一つの仕方で，前提すべてを1，結論を0とするように，各要素命題に真理値を割り当てることができる．すなわち，前提すべてが1で，結論が0となることがある．それ故，推論は妥当でない．

885

例 1	p	q	$\sim q$	$\sim p$	
	1		1	0	
(3) p	(3) q	(1) q	(2) p		
x 0	0	0	<u>1</u>		妥当である

890

例 2	p	q	q	r	p	r
	1		1		0	
(2) p	(2) q	(3) q	(3) r	(1) p	(1) r	
1	1	1	x 1	1	<u>0</u>	妥当である

895

例 3 義昭は大学教員であれば，質問を無視しない．
 義昭は大学教員であれば，短気である．
 義昭は質問を無視すれば，短気である．

900

「義昭は大学教員である」を p
 「義昭は質問を無視する」を q
 「義昭は短気である」を r とする．

905

	p	$\sim q$	p	r	q	r
	1		1		0	
(3) p	(3) $\sim q$	(2) p	(2) r	(1) q	(1) r	
0	1	0	0	<u>1</u>	0	
0	0					
	(4) q					
	x 0					
	1					妥当でない

910

練習 以下の推論が妥当であるかどうかを，真理値割り当ての方法によって判定しなさい．妥当でない推論については，前提すべてを真，結論を偽とする要素命題の真理値を明記すること．

915

1) 敬子は新聞記者ならば，正義の味方である．
 敬子はジャーナリストならば，正義の味方である．
 敬子は新聞記者ならば，ジャーナリストである．

920

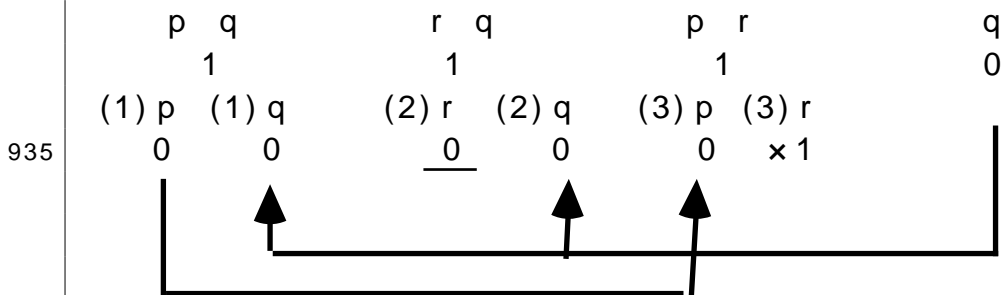
2) ゲオルクはドイツ人であるかマジャール人である．
 ゲオルクはドイツ人であれば，ドイツ語が話せる．
 ゲオルクはドイツ語が話せない．
 ゲオルクはマジャール人である．

3. ディレンマ(dilemma, 両刀論法)

925 例4 私はギョーザを食べれば, 口臭がする.
 私は焼肉を食べれば, 口臭がする.
 私はギョーザか焼肉を食べる.
 私は口臭がする.

(単純構成的ディレンマ)

930 「私はギョーザを食べる」をp, 「私は口臭がする」をq, 「私は焼肉を食べる」をrとする.



940 妥当である

前提に含まれる二つの条件命題の後件が同じである場合, 「単純」と称する.
 前提に含まれる二つの条件命題の後件が異なる場合, 「複合」と称する.
 前提に含まれる選言命題が肯定の要素命題からなる場合, 「構成的」と称する.
 945 前提に含まれる選言命題が否定の要素命題からなる場合, 「破壊的」と称する.

練習 真理値割り当ての方法によって, 以下のディレンマが妥当であることを示しなさい(例4に従って, 命題を記号化し, 推論を表現すること).

950 1) 私はワインを飲めば, 二日酔いになる.
 私はビールを飲めば, 腹をこわす.
 私はワインかビールを飲む.
 私は二日酔いになるか腹をこわす. (複合構成的ディレンマ)

955 2) 物理学者は人間であれば, 羽目をはずす.
 物理学者は人間であれば, 異性に関心をもつ.
 物理学者は羽目をはずさないか, 異性に関心をもたない.
 物理学者は人間ではない. (単純破壊的ディレンマ)

960 3) 聡子は恋人を大事にすれば, 友人を失う.
 聡子は友人を大事にすれば, 恋人を失う.
 聡子は友人を失わないか, 恋人を失わない.
 聡子は恋人を大事にしないか, 友人を大事にしない. (複合破壊的ディレンマ)

965

系統	分派	命題変項	術語変項	真理関数	限量記号
ポーランド系		p q	ϕxy	N K A C E	$\Pi x \Sigma x$
ラッセル系	ラッセル	p q	$\phi(x, y)$	$\neg \cdot \vee \supset \equiv$	$(x) (\exists x)$
	カルナップ	p q	Fxy	$\neg \cdot \vee \supset \equiv$	$(x) (\exists x)$
ヒルベルト系	旧版	X Y	F(x, y)	- & $\vee \rightarrow \neg$	$(x) (Ex)$
	新版	A B	Fxy	$\neg \wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow$	$\forall x \exists x$

2項真理関数

p q	ϕ_1	$\phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi_5$	ϕ_6	$\phi_7 \phi_8$	$\phi_9 \phi_{10}$	ϕ_{11}	$\phi_{12} \phi_{13} \phi_{14} \phi_{15}$	ϕ_{16}
1 1	1	1 1 1 0	1	1 1	0 0	0	1 0 0 0	0
1 0	1	1 1 0 1	0	1 0	1 0	1	0 1 0 0	0
0 1	1	1 0 1 1	0	0 1	0 1	1	0 0 1 0	0
0 0	1	0 1 1 1	1	0 0	1 1	0	0 0 0 1	0
	t	$\vee \subset \supset \neg$	\equiv	p q	$\sim q \sim p$	\neq	$\wedge \supseteq \subseteq \nabla$	f

注意1 上記のうち、よく使うのは、次の5つである。

ϕ_2 : $p \vee q$ 選言 (pまたはqである), ϕ_4 : $p \supset q$ 条件 (pならばqである),
 ϕ_6 : $p \equiv q$ 相条件・等値 (if and only if), ϕ_{10} : $\sim p$ 否定 (pでない),
 ϕ_{12} : $p \wedge q$ 連言 (pかつqである)

注意2 ポーランド系記号法では、下記のようになるが、J, K, M, Xは殆ど用いられず、LとMも様相を表す記号として用いられる。

ϕ_2 : Apq, ϕ_3 : Bpq, ϕ_4 : Cpq, ϕ_5 : Dpq, ϕ_6 : Epq, ϕ_{10} : Npq, ϕ_{11} : Jpq,
 ϕ_{12} : Kpq, ϕ_{13} : Lpq, ϕ_{14} : Mpq, ϕ_{15} : Xpq

例1 CNpCpq は, $\sim p \supset (p \supset q)$

例2 ApNp は, $p \vee \sim p$

例3 EKpqKqp は, $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$

練習 ポーランド系記号で表された次の1)~5)を、5つの論理結合子 ($\vee, \supset, \equiv, \sim, \wedge$) を用いて表現せよ。

- 1) CCpqCCqrCpr
- 2) CCNppp
- 3) CKCpqCqrCpr
- 4) CKpNpq
- 5) CApqAqp

1000 述語論理 Predicate logic の導入

1. 命題論理から述語論理へ

推論(1)

1005 義昭は哲学者なら，腹が出ている． p q
 義昭は哲学者である． p
 義昭は腹が出ている． q

推論(2)

1010 すべての哲学者は腹が出ている． p
 義昭は哲学者である． q
 義昭は腹が出ている． r

推論(3)

1015 義昭は腹が出ている． p
 腹が出ている者が少なくとも一人いる． q

1020 命題論理では，論理分析の最小単位が真偽を問題にできる要素命題に制限されていたので，上記の推論(1)の妥当性を示すことはできるが，推論(2)(3)の妥当性に関しては，これを示すことができない．推論(2)(3)を扱うためには，要素命題の内部構造を分析する方法をとらなければならない(述語論理)．

2. 単称命題

1025 個体定項：「義昭」のように特定の個体 individual を表わす．a, b, c など．
 述語記号：「腹が出ている」のように個体の性質を表わす．F, G, H など．

「義昭」をa，「日本」をbで表わし，「・・・は腹が出ている」をF，「・・・は島国である」をGで表わすことにすると，以下のようになる(単称命題)．

1030 (1) 「義昭は腹が出ている」 Fa
 (2) 「日本は島国である」 Gb

単称命題は，真偽を確定し得る．

1035 例 義昭か昭義が犯人だ．

「義昭」をa，「昭義」をb，「・・・が犯人だ」をFとすると，
 「義昭か昭義が犯人だ」 Fa Fb

1040 3. 命題関数 Propositional function

個体変項：不特定の個体を表わす．x, y, z など．

1045 個体変項をx, yとし，「・・・は腹が出ている」をF，「・・・は島国である」をGで表わすことにすると，以下のようになる(命題関数)．

(1) 「xは腹が出ている」 Fx

(2) 「yは島国である」 Gy

1050

命題関数は、真偽を確定し得ないが、個体変項xを個体定項aに置き換えれば、 Fa (単称命題) となり、真偽を確定し得る。

4. 量化記号 Quantifier

1055

4-1. 全称記号 Universal quantifier と存在記号 Existential quantifier

全称記号 「すべて」

存在記号 「少なくともひとつ」

1060

全称量子子 x 「すべてのxについて」

存在量子子 x 「少なくともひとつのxについて」

全称命題 xFx 「すべてのxについて、xはFである」・・・(1)

1065

存在命題 xFx 「少なくともひとつのxについて、xはFである」・・・(2)

(1)は、「すべてのxはFである」とも読まれる。

(2)は、「或るxはFである」あるいは「Fであるxが少なくともひとつ存在する」とも読まれる。また、(2)は特称命題とも呼ばれる。

1070

4-2. 個体領域

「すべてのxについて」あるいは「少なくともひとつのxについて」というときの、xがどの範囲に含まれる個体であるかをあらかじめ明らかにしておく必要がある。個体の存在する範囲を「個体領域」と呼ぶ。

1075

例 変項xの個体領域を「学生からなる集合」とする。この場合、「・・・は学生である」という述語は不要になる。「・・・はアラブ語(アラビア語)ができる」をFとする。

1080

(1) 「すべての学生はアラブ語ができる」 $x(xはアラブ語ができる)$

xFx

(2) 「すべての学生はアラブ語ができない」 $x \sim (xはアラブ語ができる)$

$x \sim Fx$

(3) 「ある学生はアラブ語ができる」 $x(xはアラブ語ができる)$

1085

xFx

(4) 「ある学生はアラブ語ができない」 $x \sim (xはアラブ語ができる)$

$x \sim Fx$

(5) 「アラブ語のできる学生がいるかないかだ」 $xFx \sim xFx$

1090

(6) 「すべての学生はアラブ語ができるかできないかだ」 $x(Fx \sim Fx)$

(5)(6)は、個体領域をどのように設定しても常に真である(恒真)が。(1)~(4)は、個体領域の設定の仕方によって真になったり偽になったりする(偶然的, 事実的)。

I095 4-3. 作用域

作用域：全称記号 あるいは存在記号 が，それに続く命題関数に作用する最小の範囲．

		量化子	作用域
I100 (1)	xFx	x	Fx
(2)	xGx	x	Gx
(3)	$xFx \quad xGx$	x	Fx
		x	Gx
(4)	$x(Fx \quad Gx)$	x	$(Fx \quad Gx)$

I105

4-4. 自由変項 free variable と束縛変項 bound variable

自由変項：全称記号あるいは存在記号の作用域内にない変項．

束縛変項：全称記号あるいは存在記号の作用域内にある変項．

I110

- (1) $xFx \quad Gy \quad \dots \dots \dots x$ は束縛変項， y は自由変項．
- (2) $x(Fx \quad Gx \quad Hy) \quad \dots \dots \dots x$ は束縛変項， y は自由変項．
- (3) $x(Fx \quad Gx \quad yHy)$
- (4) $xFx \quad y(Gx \quad Hy)$

I115

- (5) $x((Fx \quad xGx) \quad y(Gy \quad Hx))$

5. 命題の分類

命題

I120

単称命題

- (1) 単称肯定命題 Fa
- (2) 単称否定命題 $\sim Fa$

量化命題

I125

- (3) 全称肯定命題 xFx
- (4) 全称否定命題 $x \sim Fx$
- (5) 存在肯定命題 xFx (特称肯定命題)
- (6) 存在否定命題 $x \sim Fx$ (特称否定命題)

6. 量化命題の有限解釈 (個体領域が有限の場合)

I130

例 個体領域：研究室のメンバー(a, b, c, d)
 F ：「・・・はアルバイトをしている」

I135

- (1) 「研究室のすべてのメンバーはアルバイトをしている」
 xFx
 $Fa \quad Fb \quad Fc \quad Fd$

I140

- (2) 「研究室のあるメンバーはアルバイトをしている」
 xFx
 $Fa \quad Fb \quad Fc \quad Fd$

練習 個体領域を(a, b)として, 以下の式を展開しなさい.

(1) $xFx \quad xGx$

(2) $xFx \quad xGx$

I145 (3) $x(Fx \quad Gx)$

7. 量化命題と否定

個体領域を鳥の集合, 述語Fを「・・・は赤い」とする.

I150

全称命題

(1) xFx 「すべての鳥は赤い」

(2) $\sim xFx$ 「すべての鳥が赤い, というわけではない」

(3) $x \sim Fx$ 「すべての鳥は赤くない」

I155 (4) $\sim x \sim Fx$ 「鳥はすべて赤くない, というわけではない」

存在命題

(5) xFx 「赤い鳥がいる」

(6) $\sim xFx$ 「赤い鳥はいない」

I160 (7) $x \sim Fx$ 「赤くない鳥がいる」

(8) $\sim x \sim Fx$ 「赤くない鳥はいない」

量化子と否定の関係

(a) $xFx \quad \sim x \sim Fx$

I165 (b) $xFx \quad \sim x \sim Fx$

(c) $\sim xFx \quad x \sim Fx$

(d) $\sim xFx \quad x \sim Fx$

(a) $xFx \quad \sim x \sim Fx$ について, 個体領域を(a, b, c)として, 両辺を展開する.

I170

左辺 $xFx \quad Fa \quad Fb \quad Fc$

右辺 $\sim x \sim Fx \quad \sim(\sim Fa \quad \sim Fb \quad \sim Fc)$

$Fa \quad Fb \quad Fc$ [ド・モルガン]

$xFx \quad \sim x \sim Fx$

I175

練習 上にならって, (b) ~ (d)についても, 個体領域を(a, b, c)として, 両辺を展開しなさい.

量化命題と連言

I180 例) F: ~は白い, G: ~は丸い

(1) $x(Fx \quad Gx) \quad xFx \quad xGx$

(すべてのものが白くて丸い) (すべてのものが白かつすべてのものが丸い)

I185

個体領域を(a, b)とすると,

| (左辺) (Fa Ga) (Fb Gb) Fa Ga Fb Gb

|190 | (右辺) (Fa Fb) (Ga Gb) Fa Ga Fb Gb

(2) $\exists x(Fx \wedge Gx) \rightarrow (\exists xFx \wedge \exists xGx)$

(白くて丸いものがある)ならば(白いものがありかつ丸いものがある)

|195 | 個体領域を(a, b)とすると,

(左辺) (Fa Ga) (Fb Gb)

|200 | (右辺) (Fa Fb) (Ga Gb)
((Fa Fb) Ga) ((Fa Fb) Gb) 分配律10
((Fa Ga) (Fb Ga)) ((Fa Gb) (Fb Gb)) 分配律11
(Fa Ga) (Fb Ga) (Fa Gb) (Fb Gb) 結合律7
(Fa Ga) (Fb Gb) (Fb Ga) (Fa Gb) 交換律6

|205 | ここで, (Fa Ga) (Fb Gb) p, (Fb Ga) (Fa Gb) q とおくと,

(左辺) p, (右辺) p \wedge q

|210 | 従って, (左辺) (右辺)は, p (p \wedge q)

p q p (p \wedge q)
1 1 1
1 0 1
0 1 1
0 0 1

|215 |

量化命題と選言

|220 | 例) F: ~は白い, G: ~は黒い

(1) $\exists x(Fx \wedge Gx) \rightarrow (\exists xFx \wedge \exists xGx)$

|225 | (白か黒かであるものが存在する) (白いものが存在するか黒いものが存在する)

個体領域を(a, b)とすると,

(左辺) (Fa Ga) (Fb Gb) Fa Ga Fb Gb Fa Fb Ga Gb

|230 | (右辺) (Fa Fb) (Ga Gb) Fa Fb Ga Gb

(2) $(\exists xFx \wedge \exists xGx) \rightarrow \exists x(Fx \wedge Gx)$

1235 (すべてのものが白いか, すべてのものが黒い) ならば
(すべてのものが白いか黒いかである)

個体領域を(a, b)とすると,

1240 (左辺) (Fa Fb) (Ga Gb)
 ((Fa Fb) Ga) ((Fa Fb) Gb) 分配律
 ((Fa Ga) (Fb Ga)) ((Fa Gb) (Fb Gb)) 分配律
 (Fa Ga) (Fb Ga) (Fa Gb) (Fb Gb) 結合律
 (Fa Ga) (Fb Gb) (Fb Ga) (Fa Gb) 交換律

1245 (右辺) (Fa Ga) (Fb Gb)

ここで, (Fa Ga) (Fb Gb) p, (Fb Ga) (Fa Gb) qとおくと,

1250 (左辺) p q, (右辺) p

従って, (左辺) (右辺) は, (p q) p

	p	q	(p q)	p
1255	1	1	1	1
	1	0	1	1
	0	1	1	1
	0	0	1	1

1260 量化命題と条件法

例) F: ~は白い, G: ~は丸い

(1) $\exists x(Fx \supset Gx) \supset (\exists xFx \supset \exists xGx)$

1265 (白いなら丸いというものが存在する)
(すべてのものが白ければ, ある丸いものが存在する)

個体領域を(a, b)とすると,

1270 (左辺) $\exists x(\sim Fx \supset Gx)$ 条件法の定義17
 ($\sim Fa \supset Ga$) ($\sim Fb \supset Gb$) $\sim Fa \supset Ga$ $\sim Fb \supset Gb$ $\sim Fa$ $\sim Fb$ Ga Gb

(右辺) $\sim \exists xFx \supset \exists xGx$ 条件法の定義
 1275 $\exists x \sim Fx \supset \exists xGx$ [$\sim \exists xFx \supset \exists x \sim Fx$]
 ($\sim Fa \supset \sim Fb$) ($Ga \supset Gb$) $\sim Fa \supset \sim Fb$ $Ga \supset Gb$

(2) $(\exists xFx \supset \exists xGx) \supset \exists x(Fx \supset Gx)$

1280 (あるものが白ければすべてのものが丸い) ならば (すべてのものは白ければ丸い)

個体領域を(a, b)とすると,

1285 (左辺) $\sim xFx \quad xGx$ 条件法の定義
 $x \sim Fx \quad xGx$ [$\sim xFx \quad x \sim Fx$]
 $(\sim Fa \quad \sim Fb) (Ga \quad Gb)$

1290 (右辺) $x(\sim Fx \quad Gx)$ 条件法の定義
 $(\sim Fa \quad Ga) (\sim Fb \quad Gb)$
 $((\sim Fa \quad Ga) \quad \sim Fb) ((\sim Fa \quad Ga) \quad Gb)$ 分配律
 $((\sim Fa \quad \sim Fb) (Ga \quad \sim Fb)) ((\sim Fa \quad Gb) (Ga \quad Gb))$ 分配律
 $(\sim Fa \quad \sim Fb) (Ga \quad \sim Fb) (\sim Fa \quad Gb) (Ga \quad Gb)$ 結合律
 $(\sim Fa \quad \sim Fb) (Ga \quad Gb) (Ga \quad \sim Fb) (\sim Fa \quad Gb)$ 交換律

1295 ここで, $(\sim Fa \quad \sim Fb) (Ga \quad Gb) p$, $(Ga \quad \sim Fb) (\sim Fa \quad Gb) q$ とおくと,

(左辺) p , (右辺) $p \quad q$

従って, (左辺) (右辺) は, $p (p \quad q)$

1300 $p \quad q \quad p (p \quad q)$
1 1 1
1 0 1
0 1 1
1305 0 0 1

量化命題の一般的表現(1)(2)

1310 ・有限な個体領域ならば, 全称命題は連言()で展開できる.
存在命題は選言()で展開できる.

しかし,

・一般化すると, この手法はとれないので, 次の手法をとる.

全称命題: 全称記号のあとに, 条件文を従える.

1315 存在命題: 存在記号のあとに, 連言文を従える.

(1) 全称肯定命題 と

「すべての学生はアラブ語ができる」

1320 すべてのxについて, xが学生であるならば, xはアラブ語ができる.

すべてのxについて, (xは学生である) (xはアラブ語ができる)

$x(Fx \quad Gx)$

但し, F: ...は学生である, G: ...はアラブ語ができる

1325 Nota Bene $x(Fx \quad Gx)$ $x(\sim Fx \quad Gx)$ と $x(Fx \quad Gx)$ は異なる.

問題 $x(Fx \quad Gx)$ を日常言語(日本語)で表現せよ.

(2) 存在肯定命題 と

1330

「ある学生はポーランド語ができる」

ある x について、 x は学生であって、かつ、 x はポーランド語ができる。

ある x について、(x は学生である) (x はポーランド語ができる)

$$x(Fx \ \& \ Gx)$$

1335

但し、 F : …は学生である、 G : …はポーランド語ができる

N.B. $x(Fx \ \& \ Gx)$ と $x(Fx \ \& \ Gx) \ \& \ x(\sim Fx \ \& \ Gx)$ は異なる。

問題 $x(Fx \ \& \ Gx)$ を日常言語(日本語)で表現せよ。

1340

量化命題の一般的表現(3)(4)

(3) 全称否定命題 と と \sim

1345

「すべての学生はチェコ語ができない」

すべての x について、 x が学生であるならば、 x はチェコ語ができない。

すべての x について、(x が学生である) \sim (x はチェコ語ができる)

$$x(Fx \ \& \ \sim Gx)$$

但し、 F : …は学生である、 G : …はチェコ語ができる

1350

N.B. $x(Fx \ \& \ \sim Gx)$ と $\sim x(Fx \ \& \ Gx)$ は異なる。

問題 $\sim x(Fx \ \& \ Gx)$ を日常言語(日本語)で表現せよ。

1355

(4) 存在否定命題 と と \sim

「ある学生はチベット語ができない」

ある x について、 x は学生であって、かつ、 x はチベット語ができない。

ある x について、(x は学生である) \sim (x はチベット語ができる)

1360

$$x(Fx \ \& \ \sim Gx)$$

但し、 F : …は学生である、 G : …はチベット語ができる

N.B. $x(Fx \ \& \ \sim Gx)$ と $\sim x(Fx \ \& \ Gx)$ は異なる。

1365

問題 $\sim x(Fx \ \& \ Gx)$ を日常言語(日本語)で表現せよ。

問題 量化命題の一般的表現(1)~(4)に従って、次の文を記号化せよ(使用する記号は各自で定義せよ)。

(1) 義昭は東大卒(たばだい)卒だが、腹が出ている。

1370

(2) 足は速いが、野球はできない者がいる。

(3) 足の速い者はみんな野球ができない。

1375

(4) ある学生はチェロかピアノを弾く。