

## 多項述語

述語はそれにつく項の数によって、単項述語と多項述語に分類できる。多項述語はさらに、二項述語、三項述語・・・n項述語へと分類できる。

### 1. 単項述語

ひとつの個体定項あるいは個体変項だけをとる述語は単項述語と呼ばれる。(これまでのところ、この単項述語を扱ってきた。)

#### Fa 単称命題

$\forall x(Fx \supset Gx)$  全称命題

$\exists x(Fx \wedge Gx)$  存在命題

### 2. 多項述語

#### 2-1. 二項述語

二つの個体定項あるいは個体変項をとる述語を二項述語という。

信長をa, 秀吉をb, 「・・・は・・・の主君である」をFとすると,

「信長は秀吉の主君である」 Fab

中国をd, 日本をd, 「・・・は・・・より広い」をGとすると,

「中国は日本より広い」 Gab

#### Nota Bene

多項述語では、個体記号を置く順序が決まっている。

1番目の例で、Fba と書けば、「秀吉は信長の主君である」と読まれる。

#### 2-2. 三項述語

三つの個体定項あるいは個体変項をとる述語を三項述語という。

仲啓をa, 浩孝をb, 義昭をc, 「・・・は・・・を・・・に紹介する」をFとすると,

「仲啓は浩孝を義昭に紹介する」 Fabc

#### 2-3. 個体定項を含む二項述語

蓼丸(たでまる)をa, 「・・・は・・・を愛している」をF, 個体領域を人間の集合とすると,

「蓼丸はある人を愛している」	$x(\text{蓼丸は}x\text{を愛している})$	$xFax$
「ある人は蓼丸を愛している」	$x(x\text{は蓼丸を愛している})$	$xFxa$
「蓼丸はすべての人を愛している」	$x(\text{蓼丸は}x\text{を愛している})$	$xFax$
「すべての人は蓼丸を愛している」	$x(x\text{は蓼丸を愛している})$	$xFxa$

### 3. 量化記号の順序

量化記号が重なって現れる場合， $x yFxy$  は， $x( yFxy)$  の括弧が省略されたものである．

次の(1)，(2)は等値である．

(1)  $x yFxy$  …… 「すべての人はすべての人を愛している」

(2)  $y xFxy$  …… 「すべての人をすべての人は愛している」

個体領域を(a, b)として(1)，(2)を展開してみる．

(1)  $x yFxy$        $x( yFxy)$        $yFay$        $yFby$       (Faa Fab)      (Fba Fbb)

(2)  $y xFxy$        $y( xFxy)$        $xFxa$        $xFxb$       (Faa Fba)      (Fab Fbb)

$x yFxy$        $y xFxy$

問題 個体領域を(a, b)として(3)，(4)を展開し，(3)と(4)が等値であることを示せ．

(3)  $x yFxy$  …… 「ある人はある人を愛している」

(4)  $y xFxy$  …… 「ある人をある人は愛している」

次の(5)，(6)は等値ではない．

(5)  $x yFxy$  …… 「すべての人はある人を愛している」

(6)  $y xFxy$  …… 「ある人がすべての人によって愛されている」

個体領域を(a, b)として(5)，(6)を展開してみる．

(5)  $x yFxy$        $x( yFxy)$        $yFay$        $yFby$       (Faa Fab)      (Fba Fbb)

(6)  $y xFxy$        $y( xFxy)$        $xFxa$        $xFxb$       (Faa Fba)      (Fab Fbb)

問題 上記の(5)，(6)を更に展開して，等値でないことを確かめなさい．

問題 個体領域を(a, b)として(7), (8)を展開し, (7)と(8)が等値でないことを示せ.

(7)  $\exists x \forall y Fxy$  . . . 「ある人はすべての人を愛している」

(8)  $\forall y \exists x Fxy$  . . . 「すべての人はある人によって愛されている」

記号化の例 1

「チョモランマより高い山は日本のどの山よりも高い」(個体領域を山とする)

すべてのチョモランマより高い山はすべての日本の山より高い.

$x(x$ はチョモランマより高い  $x$ はすべての日本の山より高い)

$x(x$ はaより高い  $y(x$ はyより高い))

$x(Fxa \supset \forall y Fxy)$

記号化の例 2

「若い女性がみんな心を奪われている俳優がいる」

すべての若い女性はある俳優に心を奪われている.

$x(x$ は若い女性なら, ある俳優がいて心を奪われている)

$x((\exists y Fxy \supset \exists z Gxz) \supset \exists z \forall y (Hy \supset Ixy))$

記号化の例 3

「どんな数学者にも解けない問題がある」

$x(x$ は数学の問題  $y(y$ は数学者  $y$ は $x$ を解けない))

$x(Fx \supset \forall y (Gy \supset \sim Hyx))$

二項述語の真理値の割り当て

二項述語の自然演繹法

同一性

第 1 階の述語論理

高階の述語論理

第 1 階の述語論理に関する完全性定理

ペアノの算術の公理系を含む無矛盾な形式的体系に関する不完全性定理