量化命題と連言

例）　F: ～は白い，　G: ～は丸い

(1) $\forall x(Fx \land Gx) \equiv \forall xFx \land \forall xGx$

（すべてのものが白くて丸い）≡（すべてのものが白くかつすべてのものが丸い）

個体領域を(a, b)とすると，

（左辺）$\equiv (Fa \land Ga) \land (Fb \land Gb) \equiv Fa \land Ga \land Fb \land Gb$

（右辺）$\equiv (Fa \land Fb) \land (Ga \land Gb) \equiv Fa \land Ga \land Fb \land Gb$

(2) $\exists x(Fx \land Gx) \supset (\exists xFx \land \exists Gx)$

（白くて丸いものがある）ならば（白いものがありかつ丸いものがある）

個体領域を(a, b)とすると，

（左辺）$\equiv (Fa \land Ga) \lor (Fb \land Gb)$

（右辺）$\equiv (Fa \lor Fb) \land (Ga \lor Gb)$
$\equiv ((Fa \lor Fb) \land Ga) \lor ((Fa \lor Fb) \land Gb)$　分配律10
$\equiv ((Fa \land Ga) \lor (Fb \land Ga)) \lor ((Fa \land Gb) \lor (Fb \land Gb))$　分配律11
$\equiv (Fa \land Ga) \lor (Fb \land Ga) \lor (Fa \land Gb) \lor (Fb \land Gb)$　結合律7
$\equiv (Fa \land Ga) \lor (Fb \land Gb) \lor (Fb \land Ga) \lor (Fa \land Gb)$　交換律6

ここで，$(Fa \land Ga) \lor (Fb \land Gb) \equiv p$，$(Fb \land Ga) \lor (Fa \land Gb) \equiv q$ とおくと，

（左辺）$\equiv p$

（右辺）$\equiv p \lor q$

従って，（左辺）⊃（右辺）は，$p \supset (p \lor q)$

p	q	$p \supset (p \lor q)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	1

量化命題と選言

例）　F: ～は白い，　G: ～は黒い

(1) $\exists x(Fx \lor Gx) \equiv \exists xFx \lor \exists xGx$

（白か黒かであるものが存在する）≡（白いものが存在するか黒いものが存在する）

個体領域を(a, b)とすると，

（左辺）$\equiv (Fa \lor Ga) \lor (Fb \lor Gb) \equiv Fa \lor Ga \lor Fb \lor Gb \equiv Fa \lor Fb \lor Ga \lor Gb$

（右辺）$\equiv (Fa \lor Fb) \lor (Ga \lor Gb) \equiv Fa \lor Fb \lor Ga \lor Gb$

(2) $(\forall xFx \lor \forall xGx) \supset \forall x(Fx \lor Gx)$

（すべてのものが白いか，すべてのものが黒い）ならば
（すべてのものが白いか黒いかである）

個体領域を(a, b)とすると，

（左辺）$\equiv (Fa \land Fb) \lor (Ga \land Gb)$
$\equiv ((Fa \land Fb) \lor Ga) \land ((Fa \land Fb) \lor Gb)$　分配律
$\equiv ((Fa \lor Ga) \land (Fb \lor Ga)) \land ((Fa \lor Gb) \land (Fb \lor Gb))$　分配律
$\equiv (Fa \lor Ga) \land (Fb \lor Ga) \land (Fa \lor Gb) \land (Fb \lor Gb)$　結合律
$\equiv (Fa \lor Ga) \land (Fb \lor Gb) \land (Fb \lor Ga) \land (Fa \lor Gb)$　交換律

（右辺）$\equiv (Fa \lor Ga) \land (Fb \lor Gb)$

ここで，$(Fa \lor Ga) \land (Fb \lor Gb) \equiv p$，$(Fb \lor Ga) \land (Fa \lor Gb) \equiv q$とおくと，

（左辺）$\equiv p \land q$

（右辺）$\equiv p$

従って，（左辺）⊃（右辺）は，$(p \land q) \supset p$

p	q	(p∧q)⊃p
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	1

量化命題と条件法

例） F: 〜は白い， G: 〜は丸い

(1) $\exists x(Fx \supset Gx) \equiv (\forall xFx \supset \exists xGx)$

（白いなら丸いというものが存在する）
≡（すべてのものが白いならば，ある丸いものが存在する）

個体領域を(a, b)とすると，

（左辺）$\equiv \exists x(\sim Fx \vee Gx)$ 条件法の定義17
$\equiv (\sim Fa \vee Ga) \vee (\sim Fb \vee Gb) \equiv \sim Fa \vee Ga \vee \sim Fb \vee Gb \equiv \sim Fa \vee \sim Fb \vee Ga \vee Gb$

（右辺）$\equiv \sim \forall xFx \vee \exists xGx$ 条件法の定義
$\equiv \exists x \sim Fx \vee \exists xGx$ [← $\sim \forall xFx \equiv \exists x \sim Fx$]
$\equiv (\sim Fa \vee \sim Fb) \vee (Ga \vee Gb) \equiv \sim Fa \vee \sim Fb \vee Ga \vee Gb$

(2) $(\exists xFx \supset \forall xGx) \supset \forall x(Fx \supset Gx)$

（あるものが白いならばすべてのものが丸い）ならば（すべてのものは白ければ丸い）

個体領域を(a, b)とすると，

（左辺）$\equiv \sim \exists xFx \vee \forall xGx$ 条件法の定義
$\equiv \forall x \sim Fx \vee \forall xGx$ [← $\sim \exists xFx \equiv \forall x \sim Fx$]
$\equiv (\sim Fa \wedge \sim Fb) \vee (Ga \wedge Gb)$

（右辺）$\equiv \forall x(\sim Fx \vee Gx)$ 条件法の定義
$\equiv (\sim Fa \vee Ga) \wedge (\sim Fb \vee Gb)$
$\equiv ((\sim Fa \vee Ga) \wedge \sim Fb) \vee ((\sim Fa \vee Ga) \wedge Gb)$ 分配律
$\equiv ((\sim Fa \wedge \sim Fb) \vee (Ga \wedge \sim Fb)) \vee ((\sim Fa \wedge Gb) \vee (Ga \wedge Gb))$ 分配律
$\equiv (\sim Fa \wedge \sim Fb) \vee (Ga \wedge \sim Fb) \vee (\sim Fa \wedge Gb) \vee (Ga \wedge Gb)$ 結合律
$\equiv (\sim Fa \wedge \sim Fb) \vee (Ga \wedge Gb) \vee (Ga \wedge \sim Fb) \vee (\sim Fa \wedge Gb)$ 交換律

ここで，$(\sim Fa \wedge \sim Fb) \vee (Ga \wedge Gb) \equiv p$，$(Ga \wedge \sim Fb) \vee (\sim Fa \wedge Gb) \equiv q$ とおくと，

（左辺）$\equiv p$，（右辺）$\equiv p \vee q$

従って，（左辺）⊃（右辺）は，$p \supset (p \vee q)$

p	q	$p \supset (p \vee q)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	1

量化命題の一般的表現(1)(2)

・有限な個体領域ならば，全称命題は連言(∧)で展開できる．
存在命題は選言(∨)で展開できる．

しかし，

・一般化すると，この手法はとれないので，次の手法をとる．

全称命題：全称記号のあとに，条件文を従える．
存在命題：存在記号のあとに，連言文を従える．

(1) 全称肯定命題　∀と⊃

「すべての学生はアラブ語ができる」
→すべてのxについて，xが学生であるならば，xはアラブ語ができる．
→すべてのxについて，(xは学生である)⊃(xはアラブ語ができる)
→ ∀x(Fx⊃Gx)
但し，F:・・・は学生である，G:・・・はアラブ語ができる

Nota Bene　∀x(Fx⊃Gx)≡∀x(〜Fx∨Gx) と ∀x(Fx∧Gx) は異なる．

問題　∀x(Fx∧Gx) を日常言語（日本語）で表現せよ．

(2) 存在肯定命題　∃と∧

「ある学生はポーランド語ができる」
→あるxについて，xは学生であって，かつ，xはポーランド語ができる．
→あるxについて，(xは学生である)∧(xはポーランド語ができる)
→∃x(Fx∧Gx)
但し，F:・・・は学生である，G:・・・はポーランド語ができる

N.B.　∃x(Fx∧Gx)　と　∃x(Fx⊃Gx)≡∃x(〜Fx∨Gx)　は異なる．

問題　∃x(Fx⊃Gx) を日常言語（日本語）で表現せよ．

量化命題の一般的表現(3)(4)

(3) 全称否定命題　∀と⊃と～

「すべての学生はチェコ語ができない」
→すべてのxについて，xが学生であるならば，xはチェコ語ができない．
→すべてのxについて，(xが学生である)⊃～(xはチェコ語ができる)
→ ∀x(Fx⊃～Gx)
但し，F: ・・・は学生である，G: ・・・はチェコ語ができる

N.B. ∀x(Fx⊃～Gx) と ～∀x(Fx⊃Gx) は異なる．

問題　～∀x(Fx⊃Gx) を日常言語（日本語）で表現せよ．

(4) 存在否定命題　ヨと∧と～

「ある学生はチベット語ができない」
→あるxについて，xは学生であって，かつ，xはチベット語ができない．
→あるxについて，(xは学生である)∧～(xはチベット語ができる)
→ ヨx(Fx∧～Gx)
但し，F: ・・・は学生である，G: ・・・はチベット語ができる

N.B. ヨx(Fx∧～Gx) と ～ヨx(Fx∧Gx) は異なる．

問題　～ヨx(Fx∧Gx) を日常言語（日本語）で表現せよ．

問題　量化命題の一般的表現(1)～(4)に従って，次の文を記号化せよ（使用する記号は各自で定義せよ）．

(1) 義昭は東大卒（たばだい）卒だが，腹が出ている．

(2) 足は速いが，野球はできない者がいる．

(3) 足の速い者はみんな野球ができない．

(4) ある学生はチェロかピアノを弾く．