



Sパラメータ特論 [I]

——反射係数の二つの定義——

Advanced Concepts in S-parameters [I] :
Two Incompatible Definitions of Reflection Coefficients

天川修平

1. はじめに

工学部初年級で学ぶ線形回路網の表現として、 Z 行列（インピーダンス行列）や Y 行列（アドミタンス行列）がある。インピーダンスとアドミタンスは交流理論で出てくる量だから、 Z 行列も Y 行列も周波数領域で回路網を表現した量ということになる。インピーダンスは電流と電圧を測れば算出できるし、インピーダンスアナライザという測定器もある。

周波数領域での線形回路網の表現にはほかにも幾つかあり、マイクロ波工学や高周波回路工学では S 行列（散乱行列）なる表現を利用する。 S 行列の行列要素を S パラメータ（散乱パラメータ）と呼ぶ。 S パラメータはベクトルネットワークアナライザ（VNA）で測ることができる。ある回路網の Z 行列があったとき、それを S 行列に変換することもできるし、その逆も可能である。しかしながら、マイクロ波帯ではインピーダンスを直接測定するのが困難なため、周波数領域での測定と言えば、専ら S パラメータ測定となる。

S 行列と Z 行列の相互変換に必要な数学は複素数の四

則演算（と行列演算）だけであり、特に難しいところはない。にもかかわらず、 S 行列は Z 行列や Y 行列と比べて格段に理解が難しい。 S パラメータとは、簡単に言えば伝送線路を伝搬する電圧の波に対する反射係数や透過係数である。したがって、 S パラメータはインピーダンスやアドミタンスと違い、比を表す無次元量である。例えばインピーダンスを無次元量に変換するには、インピーダンスの次元を持った量で割ればよい。ここで出てくる「インピーダンスの次元を持った量」を基準インピーダンス（reference impedance）と呼ぶ。 S パラメータが比を表す量であることが、高い周波数での測定のしやすさ、そして測定器の作りやすさに直接関係している。しかし、同時にこれが任意性が入り込む原因ともなっており、 S パラメータの定義は複数考えることができる。具体的には、

- ① 基準インピーダンスの値をどう選ぶか。
- ②（前述どおり）電圧同士の比で定義するか、あるいは電流同士の比で定義するか。
- ③ 電圧・電流を重視するか、あるいは電力を重視するか（後述）。

などが定義の分かれ目となる。定義がいろいろあり得るなら、どの定義を用いているか明示しなければまずいはずであるが、困ったことに明示されることはほとんどない。それでも実用上さほど困らない理由は、習慣的に、基準インピーダンスは実数値 50Ω とし、電圧同士の比で定義することになっているからである。基準インピーダンスが実数値だと、結果的に③の区別は消滅する。とはいえ、時として複素数値の基準インピーダンスを扱う必要性が出てくることもある。そうすると、③の区別は

目次

- [I] 反射係数の二つの定義（5月号）
- [II] S パラメータの諸性質（6月号）
- [III・完] 基準インピーダンスの設定（7月号）

天川修平 正員 広島大学大学院先端物質科学研究科半導体集積科学専攻
E-mail amakawa@hiroshima-u.ac.jp
Shuhei AMAKAWA, Member (Graduate School of Advanced Sciences of Matter,
Hiroshima University, Higashihiroshima-shi, 739-8530 Japan).
電子情報通信学会誌 Vol.100 No.5 pp.381-386 2017年5月
©電子情報通信学会 2017

(現段階では意味が分からないと思うが) 決定的に重要である。また、「電力重視」で行くと、知らず知らずのうちに②で電流同士の比を採用しているかもしれない。

基準インピーダンスが複素数値だと、Sパラメータの定義は互換性のない2系統に分かれる。「複素基準インピーダンス」と言うと、現実離れたアカデミックな話題に聞こえるかもしれないが、そうではない。筆者はミリ波集積回路の研究をしているが、必要に迫られて両方のSパラメータを使い分けている。定義が複数あるならば、自分の使っているシミュレータ類がどのSパラメータを実装しているのかを把握し、適切に利用することは実用上重要である。本講座では、Sパラメータの暗部に光を当て、特に基準インピーダンスが複素数値の場合のSパラメータについて重点をおいて解説する。ここ数年、Sパラメータに2系統の定義があることの認知度がようやく上がりつつあるようで、この点について論じた文献も増えつつある。しかしながら、相当に偏った見方をしているものもある。2系統の定義は、どちらか一方だけが「正しい」というものではなく、Kurokawaも言うとおり⁽¹⁾、用途が違うのだ。

連載第1回の今回は、Sパラメータの最も単純な例である反射係数について説明する。連載第2回は、透過係数も含めたSパラメータの諸性質を論じ、測定されるSパラメータがどの定義によるのかも述べる。連載第3回は、Sパラメータの測定をする際、基準インピーダンスがいかに設定され、また場合によってはそれが複素数となるのかを説明する。

本稿の内容は文献(2)~(4)を基にした。紙幅の都合で文献引用は最小限にとどめたので、詳しい文献リストは文献(3)を参照されたい。ここから先、読者は伝送線路理論の初等的知識をお持ちのものとして想定する。

2. 伝送線路と反射係数

反射係数は1ポートのSパラメータである。1ポートとは、集中定数2端子素子(とみなし得る回路網)のことだと思えばいい(図1)。反射係数について考えるだけで、Sパラメータの諸性質についてかなりのことが理解できる。

特性インピーダンス Z_0 の線路がインピーダンス Z_L の負荷で終端されているとき(図1)、負荷端での反射係数 S_{11} は次式で与えられる^{(5),(6)}。

$$S_{11} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (1)$$

標準的には、線路は無損失で Z_0 は実数値(典型的には50Ω)を取ると考える。これが通常使われる反射係数の定義である。 Z_0 が実数であることを強調するためには

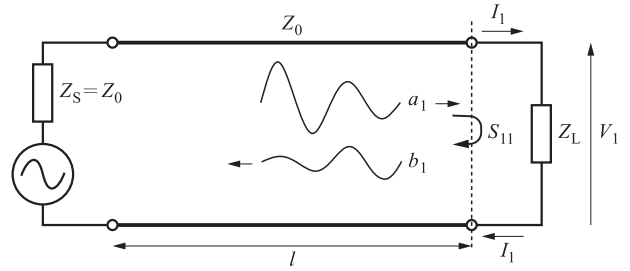


図1 伝送線路を介して励起される負荷 Z_L

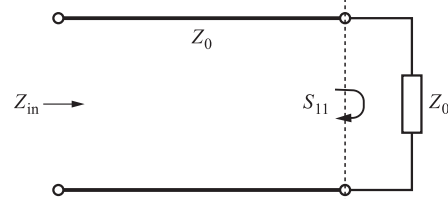


図2 特性インピーダンス Z_0 で終端された線路は無限に長く見え、 $Z_{in} = Z_0$ 、 $S_{11(Z_0)} = 0$ である

$$S_{11(R_{ref})} = \frac{Z_L - R_{ref}}{Z_L + R_{ref}} \quad (2)$$

とでも書いた方が適当だ。 R_{ref} は「基準抵抗」と呼ばれ、通常は1ポートに接続された無損失線路の特性抵抗 R_0 に一致させる。式(2)の左辺のように基準抵抗(あるいは基準インピーダンス)を明示する表記法はWoods⁽⁷⁾による。式(2)を Z_L について解くと、

$$Z_L = \frac{1 + S_{11(R_{ref})}}{1 - S_{11(R_{ref})}} \cdot R_{ref} \quad (3)$$

である。インピーダンス Z_L は、それ自体が図1の伝送線路を終端する1ポートの完全な記述になっている。それに対して、 S_{11} はそれだけでは1ポートの完全な記述になっておらず、式(3)から明らかなおと、 $R_{ref}(>0)$ とセットになって初めて完全な記述 Z_L を与える。これがSパラメータ・S行列の著しい特徴である。回路網によっては、Z行列またはY行列が存在しない(行列要素が発散してしまう)場合があるが、S行列はどんな回路網にも必ず存在する(式(2)の分母は0にならない)。これがS行列の理論上の利点の一つである。

では、線路に損失があり、 Z_0 が複素数の場合の反射係数はどう考えたらいいだろうか。有損失伝送線路は初等的な教科書でも取り上げられる話題であり、現実の伝送線路には必ず損失があるわけだが、不思議なことに、その場合の反射係数について論じている本は少ない。特性インピーダンスが Z_0 の有損失伝送線路の遠端を負荷

Z_0 で終端すると(図2), 近端から見たとき, この線路は無限に長く見える. 無限に長く見えるということは, 近端から波を入れても反射波が返ってこないということだから, 負荷端での反射係数 S_{11} は0となるべきである. したがって, 反射係数は式(1)で定義すればよい. 式(2)に倣って書き直すと,

$$S_{11(Z_{\text{ref}})} = \frac{Z_L - Z_{\text{ref}}}{Z_L + Z_{\text{ref}}} \quad (4)$$

である. 普通は基準インピーダンスは $Z_{\text{ref}}=Z_0$ とする. ところで, なぜ特性インピーダンスをそのまま使わず, わざわざ「基準インピーダンス Z_{ref} 」などというものを持ち出すのか? 特性インピーダンスは伝送線路という物の属性だが, 基準インピーダンスは物の属性ではなく計算に使う数値である. 実用上, 実物から離れた操作が必要になる場合がしばしばあり, その際には基準インピーダンスとして実物の属性(複素特性インピーダンス)とは違う値(典型的には 50Ω)を使うのである. これについては連載第2回, 第3回でも触れる.

さて, 図1で $Z_L \neq Z_0$ ならば反射波が戻ってきて線路が無限に長く見えなくなるわけだから, $S_{11} \neq 0$ である. 式(1)に伝送線路(より一般的には導波路)の属性である Z_0 が出てくることから分かる通り, 元来Sパラメータは伝送線路を伝搬する進行波と密接に関係している. 式(4)を眺めても, 1ポートに入射し, 反射されている波が何なのか判然としないが, 式(4)は電圧の進行波に対する反射係数と考えてよい. そのことがあらわになるように書くと

$$S_{11(Z_{\text{ref}})} = \frac{V_1^-}{V_1^+} = \frac{b_1}{a_1} \quad (5)$$

V_1^+ は負荷端での右向き電圧進行波(入射波)の複素振幅(フェーザ), V_1^- は負荷端での左向き電圧進行波(反射波)の複素振幅である^{(5), (6)}. 振幅の代わりに実効値で考える流儀もあるが, Sパラメータは比なので式(5)の値は変わらない.

電圧進行波振幅 V_1^+ を使って負荷端での電圧 V_1 (図1)を表すと,

$$V_1 = V_1^+ + V_1^- \quad (6)$$

である. 特性インピーダンス Z_0 は, 進行波の電圧振幅と電流振幅を関係付ける^{(5), (6)}.

$$\frac{V_1^+}{I_1^+} = -\frac{V_1^-}{I_1^-} = Z_0 (= Z_{\text{ref}}) \quad (7)$$

負荷端での電流 I_1 は

$$I_1 = I_1^+ + I_1^- \quad (8)$$

反射係数を定義するには V_1^+ と V_1^- だけでも一応用は足りるが, 2ポート以上に拡張したときのことも考慮して⁽³⁾, 式(5)では下記で定義される規格化進行波振幅 a_1 , b_1 も使った⁽⁸⁾(図1).

$$a_1 \equiv \frac{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}})}}{|Z_{\text{ref}}|} V_1^+ = \frac{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}})}}{|Z_{\text{ref}}|} \frac{V_1 + Z_{\text{ref}} I_1}{2} \quad (9)$$

$$b_1 \equiv \frac{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}})}}{|Z_{\text{ref}}|} V_1^- = \frac{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}})}}{|Z_{\text{ref}}|} \frac{V_1 - Z_{\text{ref}} I_1}{2} \quad (10)$$

$\Re(z)$ は複素数 z の実部を表す. a_1 と b_1 は電力の平方根の次元を持つが, 電圧に実定数を掛けただけの量である^(注1). したがって, 式(5)は(電力ではなく)電圧反射係数と理解すべき複素数値である.

式(5)と同様に, 電流反射係数を定義することもできる. 通常⁽⁵⁾の定義は

$$S_{111(R_{\text{ref}})} \equiv \frac{I_1^-}{I_1^+} = -\frac{b_1}{a_1} = -S_{111(R_{\text{ref}})} \quad (11)$$

である. しかし, まれに下記の定義が採用されることもある⁽⁹⁾.

$$S_{111(R_{\text{ref}})} \equiv \frac{I_1'^-}{I_1^+} = \frac{b_1}{a_1} = S_{111(R_{\text{ref}})} \quad (12)$$

ここで $I_1'^- \equiv -I_1^-$ は, 負荷端での電流が式(8)の代わりに $I_1 = I_1^+ - I_1'^-$ で与えられるとする立場から出てくる. 式(12)は電圧反射係数(2)と一致するので無意味に思えるかもしれないが, 後で説明する「電力波」と合わせて考えると, あながち無意味でないことが判明する⁽³⁾.

3. 電力最大化と反射係数

電気回路の教科書に必ず書いてある, 負荷での消費電力最大化の問題と反射係数との関係はどうなっているのだろうか(図3). 負荷での消費電力を最大にするには, 負荷インピーダンス Z_L と信号源インピーダンス Z_S とが複素共役の関係($Z_L = Z_S^*$)になっていなければならない. $S_{11} = 0$ ならば消費電力が最大化されると考えていいのだろうか?

実は, 複素特性インピーダンス Z_0 の線路を介して負

(注1) 式(9), (10)の V_1^+ , V_1^- の手前に掛かる係数を $1/\sqrt{Z_{\text{ref}}}$ とする流儀もある. この場合, V_1^+ と a_1 の位相は一致しない.

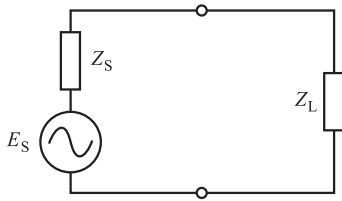


図3 信号源インピーダンスが Z_S のとき、負荷インピーダンス Z_L での消費電力を最大にするには？

荷が励起される場合 (図1) と、複素信号源インピーダンス Z_S に励起される場合 (図3) とでは、Sパラメータの定義を変えた方がいい。図3の負荷の消費電力が最大化されたときに反射が0となるような反射係数を考えてみよう。 Z_S が実数で $Z_{\text{ref}}=Z_S$ のときに式(2)と一致し、また Z_S が複素数なら $Z_L=Z_S^*$ のときに反射係数が0になるためには

$$S_{P11(Z_{\text{ref}})} = \frac{Z_L - Z_{\text{ref}}^*}{Z_L + Z_{\text{ref}}} \quad (13)$$

で反射係数を定義すればよい^{(1), (9), (10)}。式(4)と区別するため、式(13)には添字Pを付けた。通常、基準インピーダンスは信号源インピーダンスに一致させる ($Z_{\text{ref}}=Z_S$)。 $S_{P11(Z_S)}=0$ のとき、負荷で消費される電力は最大値を取り、消費電力は信号源の固有電力 P_{avs} (power available from the source) に一致する。

$$P_{\text{avs}} \equiv \frac{|E_{S,\text{rms}}/2|^2}{\Re(Z_S)} = \frac{|E_S|^2}{8\Re(Z_S)} \quad (14)$$

E_S はテブナン型信号源の電圧振幅、 $E_{S,\text{rms}}=E_S/\sqrt{2}$ はその実効値である。式(13)で負荷に入射し、反射されている「波」は

$$a_{p1} \equiv \frac{1}{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}})}} \frac{V_1 + Z_{\text{ref}} I_1}{2}, \quad (15)$$

$$b_{p1} \equiv \frac{1}{\sqrt{\Re(Z_{\text{ref}})}} \frac{V_1 - Z_{\text{ref}}^* I_1}{2}, \quad (16)$$

$$S_{P11(Z_{\text{ref}})} \equiv \frac{b_{p1}}{a_{p1}} \quad (17)$$

である。 a_{p1} , b_{p1} は電力波 (power waves) と呼ばれる⁽¹⁾。式(9), (10)は電力波ではない。 Z_{ref} が実数のときのみ両者は一致する。

図1で負荷 Z_L に吸収消費される電力 P_L について考える。式(5)~(10)を使って

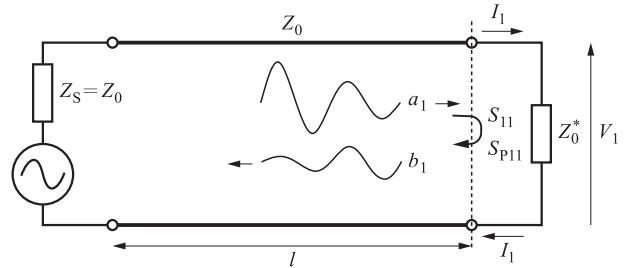


図4 Z_0^* で終端された伝送線路

$$P_L = \frac{\Re(V_1 I_1^*)}{2} = \frac{\Re[(V_1^+ + V_1^-)(I_1^+ + I_1^-)^*]}{2} \quad (18)$$

$$= \frac{|a_1|^2}{2} \left[1 - |S_{11}|^2 - 2\Im(S_{11}) \frac{\Im(Z_{\text{ref}})}{\Re(Z_{\text{ref}})} \right] \quad (19)$$

を得る。 $\Im(z)$ は複素数 z の虚部を表す。もし Z_{ref} が実数なら式(19)の最後の項が消えて

$$P_L = \frac{1}{2} (|a_1|^2 - |b_1|^2) = \frac{1}{2} |a_1|^2 (1 - |S_{11}|^2) \quad (20)$$

というよく知られた結果になり、 $|a_1|^2$ や $|b_1|^2$ は電力とみなせる。しかし、 Z_{ref} が複素数なら式(19)の第3項が存在するため $|a_1|^2$ も $|b_1|^2$ も電力とみなすわけにはいかない。これは、 a_1 , b_1 の好ましくない性質に思われるかもしれない。

電力波 a_{p1} , b_{p1} は、 Z_{ref} が複素数でも式(20)と同じ形の式を与えるように定義されている。

$$P_L = \frac{1}{2} (|a_{p1}|^2 - |b_{p1}|^2) = \frac{1}{2} |a_{p1}|^2 (1 - |S_{P11}|^2) \quad (21)$$

これが a_{p1} , b_{p1} が電力波と呼ばれるゆえんである。 $|a_{p1}|^2/2 = P_{\text{avs}}$ も成り立つ。ただし、式(21)を見て分かる通り、電力に対する反射係数は S_{P11} ではなく $|S_{P11}|^2$ である。また、式(19)の第3項は0になったのではなく、式(21)の各項に繰り込まれて見えなくなっただけである。式(21)の単純さは好ましく思えるかもしれないが、後で述べるとおり代償もある。

伝送線路と電力最大化の問題を組み合わせると、話がややこしくなってくる。図4の状況では何が起こるだろうか⁽³⁾。負荷インピーダンスは Z_0^* である。負荷端から左を見るとインピーダンスは Z_0 だから、 S_{11} に対しても S_{P11} に対しても $Z_{\text{ref}}=Z_0$ とするのがよい。図5が $S_{11(Z_0)}=0$ となるケースだから、図4の場合は $S_{11(Z_0)} \neq 0$ となる。つまり、図4の伝送線路は信号源側から右向きにのぞきこんだとき、無限長には見えない。しかし、負荷端から左を見たときのインピーダンスは Z_0 、右を見

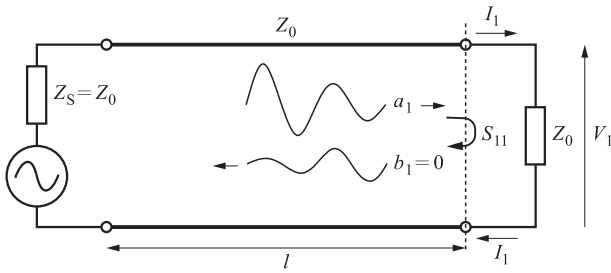


図5 無反射負荷 Z_0 で終端された伝送線路 $S_{11(z_0)}=0$ である.

たときのインピーダンスは Z_0^* だから、負荷端では $S_{P11(z_0)}=0$ である。したがって、負荷で消費される電力は最大化されているということになる。だが、このことは図5で考えた状況(式(19)に $S_{11(z_0)}=0$ を代入)、つまり線路が無限長に見えるから信号源から出た電圧波が一切反射せず負荷 Z_0 に全て吸収されるという話と矛盾しないのだろうか？ 簡単な解説が文献(3)にある。

4. 反射係数の絶対値

負荷 Z_L が $\Re(Z_L) \geq 0$ を満たすなら、この負荷は受動(passive)負荷である。受動素子の反射係数の絶対値は1以下であると多くの教科書に書いてあるが、これは $S_{11(z_{ref})}$ に対しては必ずしも成り立たない。 Z_{ref} が虚部を持つ場合、 $|S_{11(z_{ref})}| > 1$ になる可能性がある⁽¹¹⁾。それに対して、受動素子の $S_{P11(z_{ref})}$ は常に $|S_{P11(z_{ref})}| \leq 1$ を満たす⁽⁹⁾。

もう少し具体的に考えてみよう。 $z_L \equiv Z_L/Z_{ref}$ とすると、

$$S_{11(z_{ref})} = \frac{Z_L - Z_{ref}}{Z_L + Z_{ref}} = \frac{z_L - 1}{z_L + 1} \quad (22)$$

受動性の仮定により $\Re(Z_L) \geq 0$ だから、 Z_L の偏角の範囲は $|\arg Z_L| \leq \pi/2$ である(図6)。伝送線路のRLGCパラメータを使って

$$Z_{ref} = Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (23)$$

とする。線路が通常の右手系伝送線路なら $R, L, G, C > 0$ だから、 $\Re(Z_{ref}) > 0$ である。また、複素数 z の平方根は

$$z^{1/2} = \pm \sqrt{|z|} \exp\left(j \frac{\arg z}{2}\right) \quad (24)$$

だから、 $|\arg Z_{ref}| < \pi/4$ である(図7)。したがって、 z_L

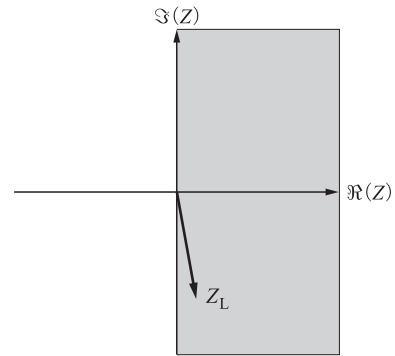


図6 受動負荷インピーダンス Z_L の偏角の範囲

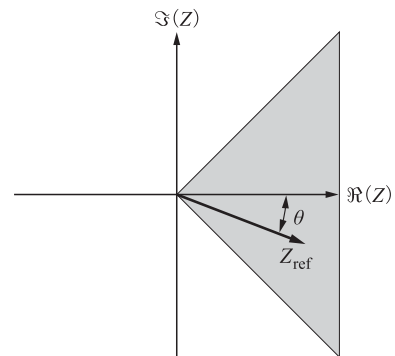


図7 基準インピーダンス $Z_{ref} = Z_0$ の偏角 $\theta = \arg Z_{ref}$ の範囲
普通の伝送線路では $\theta < 0$ になる。

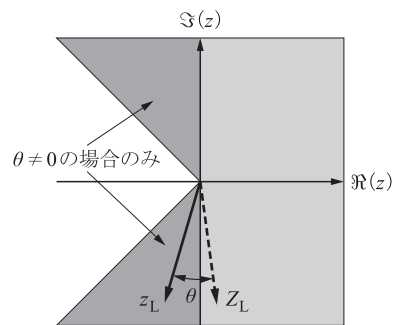


図8 $z_L = Z_L/Z_{ref}$ の偏角の範囲

の偏角は $|\arg z_L| < 3\pi/4$ となる(図8)。式(22)の分母・分子を複素平面上で見ると、図9のようになっている。この図から $|z_L - 1| > |z_L + 1|$ 、すなわち $|S_{11}| > 1$ となり得ることが見て取れるが、式でも確認してみよう。

$$|S_{11}|^2 = \frac{z_L - 1}{z_L + 1} \cdot \frac{z_L^* - 1}{z_L^* + 1} = \frac{|z_L|^2 + 1 - 2\Re(z_L)}{|z_L|^2 + 1 + 2\Re(z_L)} \quad (25)$$

$|\arg z_L| < 3\pi/4$ だから、 $\Re(z_L)$ は正にも負にもなれる。したがって、 $\Re(z_L) < 0$ ならば $|S_{11}| > 1$ となる。

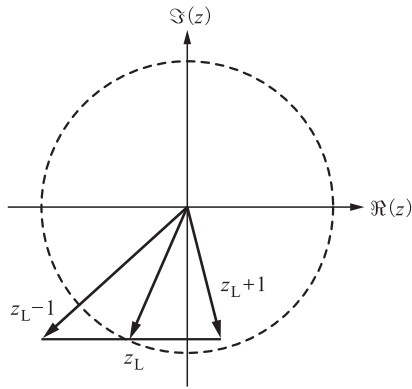


図9 式(22)の分子 z_L-1 と分母 z_L+1 の関係

$|S_{11}| > 1$ になったとしても、エネルギーの保存則に抵触しているわけではない。事実、必ず $P_L \geq 0$ となることを示すことができる^(注2)。 $|S_{11}|$ の理論上の最大値は $1 + \sqrt{2} \approx 2.41$ (!) だが、 Z_0 が大きな偏角を持つことは普通はないので、現実には測定や電磁界解析で出くわす $|S_{11}| (> 1)$ の値は 1 に近いはずである。ただし、周波数が非常に低いと特性インピーダンスは強い周波数依存性を持ち、 Z_0 の偏角の絶対値が大きくなる場合がある。

次回連載第2回は、両反射係数 (S_{11} と S_{p11}) とスミスチャートの関係を論じ、散乱行列 (S) についても説明する。

(注2) 式(19)から、 $|S_{11}|^2 + 2\Im(S_{11})\Im(Z_{ref})/\Re(Z_{ref}) \leq 1$ を示せばよい。

文 献

- (1) K. Kurokawa, "Power waves and the scattering matrix," IEEE Trans. Microw. Theory Tech., vol. 13, no. 2, pp. 194-202, 1965.
- (2) 天川修平, "Sパラメータ利用の落とし穴," MWE2015, 入門講座 FR6A, 2015.
- (3) S. Amakawa, "Scattered reflections on scattering parameters—demystifying complex-referenced S parameters—," IEICE Trans. Electron., vol. E99-C, no. 10, pp. 1100-1112, Oct. 2016.
- (4) 天川修平, "続Sパラメータ利用の落とし穴," MWE2016, 入門講座 FR6A, 2016.
- (5) R.E. Collin, Foundations for Microwave Engineering, 2nd edition, Wiley-Interscience, 2001.
- (6) R. Collier, Transmission Lines, Cambridge University Press, 2013.
- (7) D. Woods, "Multiport-network analysis by matrix renormalisation employing voltage-wave S-parameters with complex normalisation," Proc. IEE, vol. 124, no. 3, pp. 198-204, 1977.
- (8) R.B. Marks and D.F. Williams, "A general waveguide circuit theory," J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol., vol. 97, no. 5, pp. 533-562, 1992.
- (9) R. Mavaddat, Network Scattering Parameters, World Scientific, 1996.
- (10) S. Roberts, "Conjugate-image impedances," Proc. IRE, vol. 34, no. 4, pp. 198-204, 1946.
- (11) R.B. Adler, L.J. Chu, and R.M. Fano, Electromagnetic Energy Transmission and Radiation, Wiley, 1960.

(平成 28 年 11 月 28 日受付 平成 29 年 1 月 31 日最終受付)



あまかわ しゅうへい
天川 修平 (正員)

1995 東大・工・電子卒, 2001 同大学院博士課程了, ケンブリッジ大, Silvaco Data Systems (Europe), 日本ケイデンス・デザイン・システムズ社, 東工大を経て, 2010 広島大准教授, 現在に至る。高周波集積回路の研究に従事。